INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · A. HERTWIG · K. KLOTTER · K. v. SANDEN
F. SCHLEICHER · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XX. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1952

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Ing.-Archiv

Preis DM 10,50

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Geh. Reg.-Rat Professor Dr.-Ing. A. Hertwig, Berlin-Wilmersdorf, Sächsische Str. 43
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.
Professor K. v. Sanden, Neureut über Karlsruhe, Rosmarinstraße 11
Professor Dr.-Ing. F. Schleicher, Dortmund, Plauener Str. 44
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Braunschweig, Harzburger Straße 8a
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klar verständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 24 / Fernsprecher 24 40 u. 54 30

Berlin W 35
Reichpietschufer 20 / Fernsprecher Sammel-Nr. 24 92 51

Vertriebsvertretung im Ausland:
Lange, Maxwell & Springer Ltd., 41–45 Neal Street, London, W. C. 2

Inhalt:

Seite

Nickel, K., Über spezielle Tragflügelsysteme. Mit 8 Textabbildungen . 363

Ziegler, H., Kritische Drehzahlen unter Torsion und Druck. Mit 7 Textabbildungen 377

Woinowsky-Krieger, S., Über die Anwendung der *Mellin*-Transformation zur Lösung einer Aufgabe der Plattenbiegung. Mit 5 Textabbildungen 391

Stange, K., Ein Verfahren zur Beurteilung des Gütegrades von Mischungen. Mit 20 Textabbildungen 398

Jacobs, W., Experimentelle Untersuchungen am schiebenden Flügel. Mit 10 Textabbildungen 418

INGENIEUR-ARCHIV

XX. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1952

Über spezielle Tragflügelsysteme.

Von K. Nickel.

1. Einleitung. Über die folgenden Untersuchungen wurde in gedrängter Form bereits anläßlich der wissenschaftlichen Jahrestagung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik vom 28. bis 31. März 1951 in Freiburg i. Br. vorgetragen (Vortragstitel: Integralgleichungen erster Art in der Strömungslehre und ihre Auflösungen). Sie beschäftigen sich mit Tragflügeln in reibungsfreier, inkompressibler und stationärer Potentialströmung. Unter sogleich noch näher anzugebenden Voraussetzungen wird darin nach den auf die Tragflügel ausgeübten Drucken, Kräften und Momenten gefragt. Die Anzahl der Tragflügel sei n, um den Umfang der Betrachtungen nicht zu sehr zu erhöhen, soll der Grenzübergang $n \to \infty$ (unendlich viele Tragflügel: Tragflügelgitter oder Systeme von solchen), über den in Freiburg ebenfalls berichtet wurde, hier nicht vollzogen werden.

Da bis heute die dreidimensionale Tragflügeltheorie noch sehr große mathematische Schwierigkeiten bereitet, soll auch hier eine Beschränkung auf die beiden (im Falle $n = 1$ vielbearbeiteten) Sonderfälle der „tragenden Linie" und der „Profilumströmung" stattfinden, also die Spezialisierung auf verschwindende Flügeltiefe bzw. unendliche Flügelspannweite. Durch diese Grenzübergänge kommt man in beiden Fällen auf zweidimensionale Strömungen, deren Behandlung durch die Hilfsmittel der Potentialtheorie und konformen Abbildung sehr erleichtert wird. Die nachstehend angewandte Methode ist die besonders bequeme Berechnung des Strömungsverlaufs aus einer Belegung der Tragflügelkontur mit Wirbeln, wie sie der *Prandtl*schen Theorie der tragenden Linie und der *Birnbaum*schen Theorie der dünnen Profile zugrundeliegt.

Die Beschränkung auf dünne Profile bei der Berechnung der Profilumströmung wurde aus zwei Gründen getroffen. Einmal führt die *Birnbaum*sche Methode formal auf dieselben Formeln, wie die *Prandtl*sche Theorie der tragenden Linie, so daß also bei einer gemeinsamen Behandlung die mathematische Arbeit der Lösung dieser Gleichungen nur ein einziges Mal geleistet zu werden braucht. Zum anderen ist es zwar, etwa mit konformer Abbildung, jederzeit möglich, mit beliebiger Genauigkeit die Strömung um ein System von Flügelprofilen zu berechnen. Soll aber etwa die Wirkung einer kleinen Abänderung dieser Profilkonturen untersucht werden, so ist die ganze mühsame Berechnung von neuem auszuführen, ohne daß Klarheit über das zu erwartende Resultat besteht. Im Gegensatz hierzu sind zwar die Ergebnisse der Theorie der dünnen Profile von vornherein mit einem gewissen Fehler behaftet, der von den getroffenen Näherungsannahmen herrührt, jedoch lassen sich allgemeingültige Formeln z. B. für Auftriebsdichte, Gesamtauftrieb und Längsmoment angeben, aus denen sofort der Zusammenhang zwischen Profilgestalt und Profileigenschaften abgelesen werden kann.

Die Anzahl der zulässigen Tragflügelsysteme muß jedoch noch eingeschränkt werden, da sich nicht sämtliche möglichen Systeme mit den nachfolgend entwickelten Formeln behandeln lassen. Betrachtet man nämlich eine Anzahl beliebiger Profilkonturen C mit einer Wirbelbelegung $\gamma(z)$ in der komplexen z-Ebene, so wird von diesen Wirbeln an der Stelle ζ die Störungsgeschwindigkeit $u + i\,v$ erzeugt, die aus der Formel

$$u(\zeta) - i\,v(\zeta) = \frac{i}{2\pi} \sum \int_C \frac{\gamma(z)}{\zeta - z}\, dz \qquad (*)$$

berechnet werden kann (es ist über alle Konturen C zu summieren). In einer Theorie kleiner Störungsgeschwindigkeiten, wie sie die *Prandtl*sche und *Birnbaum*sche Theorie darstellt, interessiert jedoch hiervon nur die Vertikalgeschwindigkeit v, die durch den Imaginärteil des rechtsstehenden Integrals gegeben wird:

$$v(\zeta) = -\,Im \left\{ \frac{i}{2\pi} \sum \int_C \frac{\gamma(z)}{\zeta - z}\, dz \right\}. \qquad (*_*)$$

In den weiteren Rechnungen zu den eingangs gestellten Fragen ergibt sich die Aufgabe, aus Gleichung (⁂) bei gegebener linker Seite die Wirbelverteilung $\gamma(z)$ zu berechnen. Es zeigt sich, daß es zwar möglich ist, für Gleichung (*) eine allgemeine Auflösungsformel anzugeben, für die Gleichung (⁂) ist bis heute jedoch im allgemeinen Fall keine solche Formel bekannt. Nun stimmen die beiden Gleichungen überein, falls u in der ersten Gleichung verschwindet. Dieser Fall tritt für beliebige Wirbelbelegungen $\gamma(z)$ jedoch nur ein, wenn alle Konturen C Gerade sind und alle auf einer Geraden liegen. Aus diesen Gründen wird daher im folgenden die (sehr starke) Einschränkung getroffen, daß aus der Zahl aller Tragflügelsysteme nur diejenigen speziellen Anordnungen herausgegriffen werden, bei denen die Tragflügel (als tragende Linien) nebeneinander oder (als Profile) hintereinander liegen.

Entsprechend den oben angeführten zwei Grenzfällen der Tragflügeltheorie teilen sich die nachfolgenden Ausführungen in zwei Hauptteile: Ziff. 2 befaßt sich mit der Theorie der tragenden Linie, Ziff. 3 mit der Theorie der dünnen Profile je für die geschilderten speziellen Tragflügelsysteme, längere mathematische Betrachtungen sind in den mathematischen Anhang Ziff. 4 verwiesen, worin auch einige nützliche Formeln zusammengestellt sind. Zur Einführung in die jeweiligen Theorien beginnen Ziff. 2 und 3 je mit dem bereits bekannten Fall $n = 1$. Nach dem Aufstellen der Grundgleichungen für beliebiges n folgt dann in Ziff. 2 der Nachweis, daß es zu beliebig vorgegebenen induzierten Abwindgeschwindigkeiten längs der tragenden Linien genau eine zugehörige Auftriebsverteilung gibt, als Beispiel wird dann der Fall zweier benachbarter, gleich großer Flügel mit geringstem induzierten Widerstand durchgerechnet. In Ziff. 3 werden geschlossene Formeln für Auftriebsdichte, Gesamtauftrieb und Längsmoment beliebiger Profilformen angegeben und allgemeine Folgerungen daraus gezogen, die den Zusammenhang zwischen Profilform und Profileigenschaft erhellen. Als Beispiel wird noch ein zahlenmäßig gegebener Doppelflügel behandelt.

2. Tragende Linien nebeneinander. a) Ein Tragflügel erstrecke sich in Spannweitenrichtung längs der y-Achse von a bis b (vgl. Abb. 1; die benutzte Bezeichnungsweise folgt dem in der Luftfahrtliteratur üblichen Koordinatensystem, nach dem die x-Achse in Anströmrichtung, die y-Achse in Tragflügelrichtung liegt). Die örtliche Zirkulation sei $\Gamma(y)$, die von dem Tragflügel hervorgerufene Abwindgeschwindigkeit werde mit $w(y)$ bezeichnet. Unter den Vernachlässigungen der Theorie der tragenden Linie hängen dann nach *L. Prandtl*[1] Abwindgeschwindigkeit und Zirkulation nach folgender Gleichung zusammen

$$w(y) = \frac{1}{4\pi} \Xint{=}_a^b \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} \frac{d\eta}{y-\eta}. \tag{1}$$

Dabei ist an der singulären Stelle $\eta = y$ das Integral als *Cauchy*scher Hauptwert aufzufassen, was durch das Symbol $\Xint{=}$ gekennzeichnet werden soll.

Bei bekannter Abwindgeschwindigkeit $w(y)$ stellt (1) eine lineare *Fredholm*sche Integralgleichung erster Art für $d\Gamma/d\eta$ dar. Ihre Lösung wurde zuerst von *A. Betz*[2] angegeben. Sie lautet

$$\frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta} = \frac{4}{\pi} \frac{1}{\sqrt{(b-\eta)(\eta-a)}} \left[\Gamma + \Xint{=}_a^b \frac{w(y)}{y-\eta} \sqrt{(b-y)(y-a)}\, dy \right]. \tag{2}$$

Dabei ist die Gesamtzirkulation Γ eine beliebige Konstante mit der Bedeutung

$$\Gamma = \int_a^b \frac{d\Gamma(\eta)}{d\eta}\, d\eta = \Gamma(b) - \Gamma(a).$$

Da die Zirkulation $\Gamma(y)$ an den Tragflügelenden verschwinden soll, da also $\Gamma(a) = \Gamma(b) = 0$ sein soll, findet man $\Gamma = 0$. Damit ergibt sich durch Integration von (2)

$$\Gamma(\eta) = \int_a^\eta \frac{d\Gamma(t)}{dt}\, dt = \frac{4}{\pi} \int_a^\eta \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} \left(\Xint{=}_a^b \frac{w(y)}{y-t} \sqrt{(b-y)(y-a)}\, dy \right) dt. \tag{3}$$

[1] *L. Prandtl* u. *A. Betz*, Vier Abhandlungen zur Hydrodynamik und Aerodynamik. Neudruck aus den Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses zu Heidelberg und aus den Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Göttingen 1927.

[2] *A. Betz*, Beiträge zur Tragflügeltheorie, mit besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels, Diss. München 1919.

Hierin läßt sich die Integrationsreihenfolge vertauschen und das innere Integral geschlossen berechnen. Man findet so die bekannte *Betz*sche Umkehrformel

$$\Gamma(\eta) = \frac{4}{\pi} \int_a^b w(y) \log \frac{2}{b-a} \left| \frac{ab - \frac{a+b}{2}(y+\eta) + y\eta - \sqrt{(b-y)(y-a)}\sqrt{(b-\eta)(\eta-a)}}{y-\eta} \right| dy. \qquad (4)$$

b) Betrachtet man n Tragflügel nebeneinander längs der y-Achse statt des einen der Abb. 1, von denen sich der ν-te von a_ν bis b_ν erstrecken möge (vgl. Abb. 2), so ist die Gleichung (1) zu ersetzen durch das entsprechende Gleichungssystem

$$w_\mu(y_\mu) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=1}^{n}{}' \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{d\Gamma_\nu(\eta_\nu)}{d\eta_\nu} \frac{d\eta_\nu}{y_\mu - \eta_\nu} \quad (\mu = 1, 2, \ldots n). \qquad (5)$$

Dabei und im folgenden bezieht sich der Index μ immer auf den μ-ten Flügel, so daß z. B. $w_\mu(y_\mu)$ die Abwindgeschwindigkeit an der Stelle y_μ ist, die demnach zwischen a_μ und b_μ liegt.

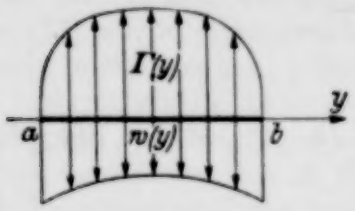


Abb. 1.

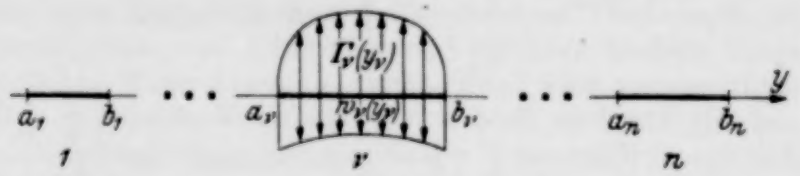


Abb. 2.

Entsprechend zu oben kann man auch hierin die Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ als bekannt voraussetzen und nach den dadurch bestimmten Zirkulationen $\Gamma_\nu(\eta_\nu)$ fragen. Bei dieser Auffassung ist (5) ein Integralgleichungssystem. Seine Lösung ist unter sehr allgemeinen Voraussetzungen [1]

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Gamma_\nu(\eta_\nu)}{d\eta_\nu} &= \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}(b_\varkappa - \eta_\nu)(a_\varkappa - \eta_\nu)}} \times \\ &\times \left[P_{n-1}(\eta_\nu) + \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^\mu \oint_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{w_\mu(y_\mu)}{y_\mu - \eta_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda - y_\mu)(a_\lambda - y_\mu)}\, dy_\mu \right] (\nu = 1, 2, \ldots n). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Dabei ist

$$P_{n-1}(\eta_\nu) = \frac{(-1)^n}{4} \eta_\nu^{n-1} \sum_{\varrho=1}^{n}{}' \int_{a_\varrho}^{b_\varrho} \frac{d\Gamma_\varrho(\eta_\varrho)}{d\eta_\varrho} d\eta_\varrho + \cdots$$

ein Polynom vom Grade $n-1$. Infolge der Bedingung

$$\Gamma_1(a_1) = \Gamma_1(b_1) = \cdots = \Gamma_n(a_n) = \Gamma_n(b_n) = 0 \qquad (7)$$

verschwindet analog zu oben in P_{n-1} das höchste Glied, die Summe der Gesamtzirkulationen, so daß dieses Polynom also tatsächlich höchstens vom $n-2$-ten Grade ist. Durch Integration über (6) erhält man wie oben

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_\nu(\eta_\nu) &= \frac{4}{\pi} \int_{a_\nu}^{\eta_\nu} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}(b_\varkappa - t_\nu)(a_\varkappa - t_\nu)}} \times \\ &\times \left[P_{n-1}(t_\nu) + \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^\mu \oint_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{w_\mu(y_\mu)}{y_\mu - t_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda - y_\mu)(a_\lambda - y_\mu)}\, dy_\mu \right] dt_\nu. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

[1] *K. Nickel*, Math. Z. 54 (1951), S. 81. Es soll an dieser Stelle ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß (6) das System (5) auch bei beliebigen komplexen Integrationsgrenzen a_ν, b_ν und Funktionen w_μ auflöst, ferner auch für beliebige Integrationswege zwischen a_ν und b_ν. An der angegebenen Stelle ist dies noch nicht bemerkt worden.

Im Gegensatz zu dem obigen Falle $n = 1$ ist jetzt eine weitere Vereinfachung nicht mehr möglich, da die Vertauschung der Integrationsreihenfolge auf hyperelliptische Integrale führt, die sich im allgemeinen nicht geschlossen auswerten lassen.

c) In den Koeffizienten des Polynoms P_{n-1} stehen n willkürliche Konstante zur Verfügung, um zu erreichen, daß die Bedingung (7) erfüllt wird, daß also sämtliche Zirkulationen Γ_ν an den Flügelenden verschwinden. Es soll nun zunächst gezeigt werden, daß diese Konstanten tatsächlich in jedem Falle ausreichen, aber auch alle gebraucht werden, daß also durch die Bedingung (7) die Einzelzirkulationen $\Gamma_\nu(\eta_\nu)$ aus Gleichung (8) eindeutig bestimmt sind. Dabei braucht man sich nicht darum zu kümmern, daß es ja schon bekannt ist, daß der höchste Koeffizient von P_{n-1} durch seine spezielle Form von selbst verschwindet. Für den nachfolgenden Beweis hat man also über n willkürliche Koeffizienten von P_{n-1} zu verfügen.

Nach (8) ist stets von selbst $\Gamma_\nu(a_\nu) = 0$, d. h. die Zirkulationen Γ_ν verschwinden an den linken Flügelenden. Also entsprechen den $2n$ Bedingungsgleichungen (7) nur noch die n-Gleichungen

$$0 = \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{d\Gamma_\nu}{d\eta_\nu}\, d\eta_\nu = \frac{4(-1)^\nu}{\pi} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{P_{n-1}(\eta_\nu)}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}(b_\varkappa-\eta_\nu)(a_\varkappa-\eta_\nu)}}\, d\eta_\nu + \frac{4(-1)^\nu}{\pi} \sum_{\mu=1}^{n} (-1)^\mu \times$$

$$\times \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{1}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}(b_\varkappa-\eta_\nu)(a_\varkappa-\eta_\nu)}} \left(\oint_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{w_\mu(y_\mu)}{y_\mu-\eta_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda-y_\mu)(a_\lambda-y_\mu)}\, dy_\mu \right) d\eta_\nu$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots n).$$

Dies ist ein lineares, unhomogenes Gleichungssystem für die n unbekannten Koeffizienten in P_{n-1}. Ein solches hat bekanntlich genau dann eine Lösung, wenn die zugehörige Determinante nicht verschwindet. Diese lautet bis auf eine Konstante

$$D = \left\| \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\eta_\nu^{\varrho-1}}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n}(b_\varkappa-\eta_\nu)(a_\varkappa-\eta_\nu)}}\, d\eta_\nu \right\| \qquad (\nu, \varrho = 1, 2, \ldots n)$$

und ist, wie in Ziff. 4a, gezeigt wird, immer > 0. Also gilt das Ergebnis: Schreibt man vor, daß die Zirkulationen Γ_ν an den Flügelenden verschwinden sollen, so gibt es zu beliebigen Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ immer genau einen zugehörigen „Satz" Zirkulationsverteilungen $\Gamma_\nu(\eta_\nu)$, der das Gleichungssystem (5) befriedigt und dieser wird durch die Formel (8) geliefert. Die unbekannten Koeffizienten des Polynoms P_{n-1} sind dabei durch die Bedingung (7) eindeutig bestimmt.

d) Berechnet man den induzierten Widerstand dieser n Tragflügel, so kommt man nach *Prandtl* [1] bis auf eine unwesentliche Konstante auf den folgenden Ausdruck

$$W = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \Gamma_\nu(y_\nu)\, w_\nu(y_\nu)\, dy_\nu\,. \tag{9}$$

Die dritte Grundaufgabe der Tragflügeltheorie stellt nun die Aufgabe, die Γ_ν so zu bestimmen, daß der Widerstand W zu einem Minimum wird. Als Nebenbedingung wird darin die Forderung gestellt, daß der Gesamtauftrieb

$$A = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \Gamma_\nu(y_\nu)\, dy_\nu \tag{10}$$

dabei konstant gehalten werden soll.

Dieses Problem wurde von *M. Munk* [2] gelöst. Die günstigste Zirkulationsverteilung ergibt sich nach dieser Arbeit aus der Forderung, daß die Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ konstant und

[1] A. a. O. S. 24.

[2] *M. Munk*, Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges, Diss. Göttingen 1919.

gleich groß sein sollen. Setzt man danach $w_1 = w_2 = \cdots = w_n = \text{konst.}$ in (8) ein, so ergibt sich mit der Formel [1]

$$\sum_{\mu=1}^{n} (-1)^{\mu} \oint_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{w_\mu(y_\mu)}{y_\mu - \eta_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - y_\mu)(a_\lambda - y_\mu)}\, dy_\mu = (-1)^n Q_n(\eta_\nu); \tag{11}$$

wobei Q_n ein normiertes Polynom vom Grade n ist,

$$\Gamma_\nu(\eta_\nu) = C \int_{a_\nu}^{\eta_\nu} \frac{(-1)^n R_n(t_\nu)\cdot}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} (b_\varkappa - t_\nu)(a_\varkappa - t_\nu)}}\, dt_\nu , \tag{12}$$

wo R_n ein normiertes Polynom vom Grade n bedeutet. Die Konstante C ergibt sich dabei aus der Bedingung (10), die n Koeffizienten von R_n sind wieder wie oben so zu bestimmen, daß die Zirkulationen an den Flügelenden verschwinden. Für $n = 1$ läßt sich die Integration in (12) ausführen und man kommt auf die bekannte [2] elliptische Auftriebsverteilung. Für $n > 1$ handelt es sich in (12) um hyperelliptische Integrale und eine Zurückführung auf elementare Funktionen ist nicht mehr möglich, jedoch wurde näherungsweise von *H. Schlichting* [3] für verschiedene Tragflügelsysteme die Abminderung des induzierten Widerstands in Abhängigkeit vom gegenseitigen Abstand der Tragflügel untersucht. Für $n = \infty$, alle Tragflügel gleich breit und mit gleichen Seitenabständen, hat *A. Betz* [4] die dritte Grundaufgabe gelöst. In diesem Extremfall lassen sich Zirkulationsverteilung und Widerstand wieder durch elementare Funktionen darstellen.

In dem Ausdruck (9) für den induzierten Widerstand kann man wegen $w_\mu(y_\mu) = \text{konst.}$ noch eine Integration sparen. Integriert man nämlich (9) partiell und beachtet dabei (7), so findet man mit Konstanten C_1 und C_2

$$W = C_1 \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} y_\nu \frac{d\Gamma_\nu}{dy_\nu}\, dy_\nu = C_2 \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{y_\nu R_n(y_\nu)}{\sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} (b_\varkappa - y_\nu)(a_\varkappa - y_\nu)}}\, dy_\nu . \tag{13}$$

e) Im Falle $n = 2$ ergeben sich für Zirkulation (12) und induzierten Widerstand (13) elliptische Integrale. Diese sind ausführlich tabuliert [5]), und erleichtern damit die Berechnung von Γ_ν und W. Da der symmetrische Fall (Tragflügel mit Spalt) ein gewisses praktisches Interesse hat, soll er hier als Beispiel gebracht werden. Es bereitet keine Schwierigkeiten, die noch offenen Konstanten in (12) und (13) zu bestimmen und die auftretenden Integrale anschließend auf die *Legendre*sche Normalform zu bringen. Da die Rechnungen jedoch etwas umfangreich sind, soll hier nur das Ergebnis angegeben werden:

Gibt man den beiden Tragflügeln die Breite 1 und bezeichnet die Spaltbreite zwischen ihnen mit s (vgl. Abb. 3), so ergeben sich die beiden Auftriebsverteilungen

$$\Gamma(y) = \frac{2}{\pi} A (2+s) \frac{\mathbf{K}\left(2\frac{\sqrt{1+s}}{2+s}\right) E\left(2\frac{\sqrt{1+s}}{2+s}, \varphi\right) - \mathbf{E}\left(2\frac{\sqrt{1+s}}{2+s}\right) F\left(2\frac{\sqrt{1+s}}{2+s}, \varphi\right)}{(2+2s+s^2)\,\mathbf{K}\left(2\frac{\sqrt{1+s}}{2+s}\right) - (2+s)^2\,\mathbf{E}\left(2\frac{\sqrt{1+s}}{2+s}\right)}$$

mit

$$y = \pm\frac{1}{2}(2+s)\sqrt{1 - 4\frac{1+s}{(2+s)^2}\sin^2\varphi}\ , \quad 0 \le \varphi \le \pi/2 .$$

Dabei ist A der konstantgehaltene Gesamtauftrieb beider Flügel, $E(k, \varphi)$ und $F(k, \varphi)$ sind die elliptischen *Legendre*schen Normalintegrale, $\mathbf{E}(k)$ und $\mathbf{K}(k)$ die vollständigen elliptischen Integrale. In den beiden Grenzfällen $s = 0$ und $s = \infty$ ergeben sich, wie zu erwarten, elliptische Auftriebsverteilungen, im ersten Fall über den ganzen Tragflügel hinweg, im zweiten Fall über jeden

[1] *K. Nickel*, a. a. O. S. 90, Formel (17).
[2] *L. Prandtl*, a. a. O. S. 32.
[3] *H. Schlichting*, Mitteilungen der Deutschen Akademie der Luftfahrtforschung. Heft 2.
[4] *A. Betz*, Der Energieverlust an spaltförmigen Unterbrechungen von Tragflügeln (maschinenschriftlich).
[5] *A. M. Legendres* Tafeln der elliptischen Normalintegrale erster und zweiter Gattung. Herausgegeben von *F. Emde*, Stuttgart 1931.

er beiden Einzelflügel. Der Zusammenhang zwischen induziertem Widerstand W und s ist $W = W_0$ für $s = 0$)

$$\frac{W}{W_0} = \frac{2\,\mathbf{K}\left(2\,\frac{\sqrt{1+s}}{2+s}\right)}{(2+2s+s^2)\,\mathbf{K}\left(2\,\frac{\sqrt{1+s}}{2+s}\right) - (2+s)^2\,\mathbf{E}\left(2\,\frac{\sqrt{1+s}}{2+s}\right)}.$$

Als Grenzwerte ergeben sich $W/W_0 = 1$ für $s = 0$ und $W/W_0 = 2$ für $s = \infty$. Dazwischen steigt die Kurve monoton mit monotoner Ableitung. In Abb. 3 sind einige Auftriebsverteilungen (gestrichelt die elliptischen zum Vergleich) und der Verlauf von W/W_0 gezeichnet. Man sieht, daß die Auftriebsverteilungen schon für sehr kleine Spaltbreiten nur noch wenig von den elliptischen Verteilungen abweichen. Damit erklärt sich das sehr starke Ansteigen des induzierten Widerstands bei kleinen Spaltbreiten. Z. B. ist bei einer Spaltbreite $s = 1/100$ (5 cm bei 10 m Spannweite) der induzierte Widerstand schon um 41% höher als ohne Spalt. Dazu muß allerdings bemerkt werden, daß in diesem Fall bei den üblichen Dimensionen der Tragflügel (Größenordnung der Flügeltiefe: ein Meter = 20fache Spaltbreite) die Voraussetzungen der tragenden Linie nicht mehr

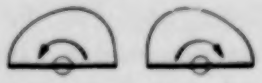


Abb. 4.

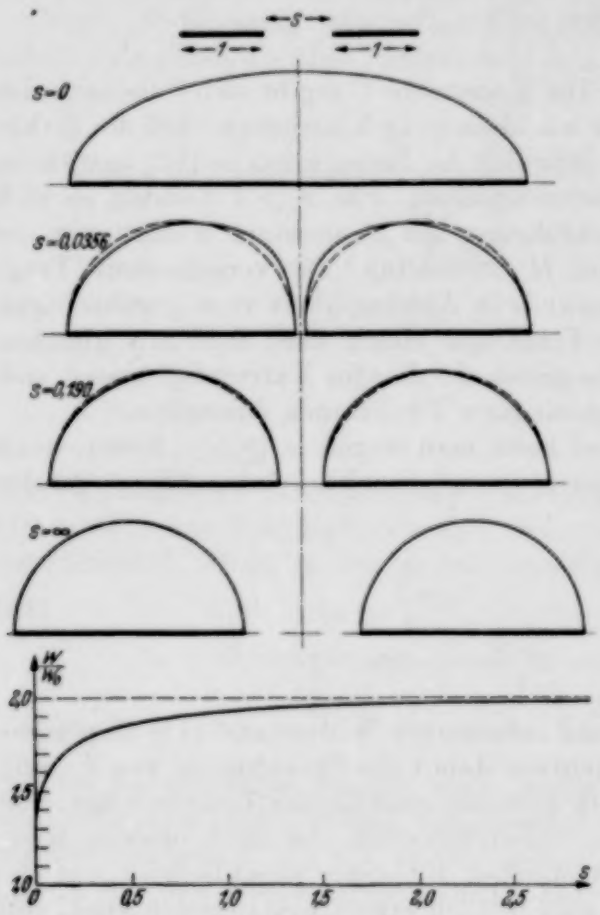


Abb. 3.

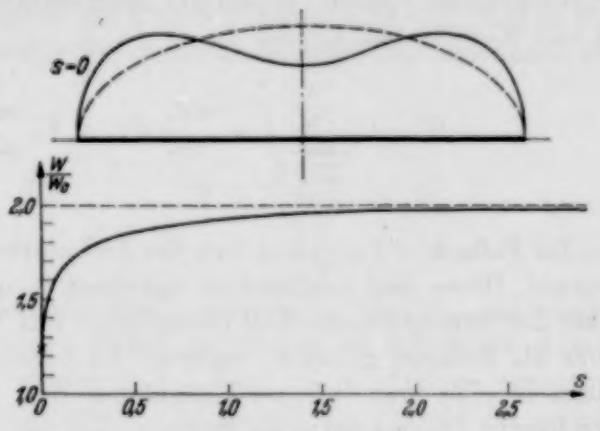


Abb. 5.

erfüllt sind, so daß eigentlich dreidimensional gerechnet werden müßte. Immerhin gibt aber die Theorie der tragenden Linie doch schon einen gewissen Einblick in die zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten. Weiter ist noch darauf zu achten, daß es sich bei den berechneten Werten von W/W_0 um Geringstwerte handelt, die nur für die dargestellten Auftriebsverteilungen gültig sind, daß also alle anderen Auftriebsverteilungen mit Spalt noch höhere Widerstandswerte besitzen. Immerhin wird man jedoch nach den experimentellen Ergebnissen im Falle eines Flügels vermuten, daß sich ebenso wie dort die tatsächlichen Widerstandswerte von den Geringstwerten nicht stark unterscheiden werden. Nachfolgende Tabelle gibt einige Werte von W/W_0. Eine solche Tabelle wurde zuerst von *K. Pohlhausen* berechnet und von *L. Prandtl* [1] mitgeteilt.

s	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,15	0,20	0,25
W/W_0	1,412	1,470	1,510	1,540	1,566	1,587	1,606	1,623	1,638	1,652	1,706	1,745	1,776

s	0,30	0,35	0,40	0,45	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00	1,50	2,00	2,50
W/W_0	1,800	1,820	1,837	1,851	1,863	1,884	1,899	1,912	1,922	1,931	1,957	1,971	1,979

s	3,00	4,00	5,00	10,00	∞
W/W_0	1,984	1,990	1,993	1,998	2,000

[1] Siehe S. 52 der in Fußnote 1 von S. 364 zitierten „Vier Abhandlungen".

f) Der in e) behandelte Tragflügel mit Spalt ist aerodynamisch dasselbe Gebilde, wie es zwei nebeneinanderfliegende Tragflügel sind. Nur stellt man bei einem Blick auf die Abb. 3 fest, daß die in e) gefundenen Zirkulationsverteilungen für die benachbarten Tragflügel nicht zulässig sein können, da (bis auf den Fall $s = \infty$) das Rollmoment um die Mitte jedes der beiden Einzelflügel nicht verschwindet, so daß die Tragflügel sich in Drehung versetzen würden, wie das in Abb. 4 skizziert ist. Will man also für zwei freie, symmetrische, im Abstand s befindliche Tragflügel diejenigen Zirkulationsverteilungen bestimmen, die ein Minimum des induzierten Widerstandes ergeben, so muß man außer konstantem Gesamtauftrieb noch konstantes (und zwar verschwindendes) Rollmoment vorschreiben. Diese Aufgabe wird zwar bei *M. Munk* nicht behandelt, sie läßt sich aber in Erweiterung eines für den Einzelflügel ausgesprochenen Ergebnisses des Verfassers [1] leicht lösen. Man erhält als Bedingung für die gesuchten günstigsten Auftriebsverteilungen, daß die zugehörigen Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ linear in y_μ sein müssen, und zwar ergibt sich

$$w_1(y_1) = \alpha - \beta y_1, \qquad w_2(y_2) = \alpha + \beta y_2$$

(für mehr als zwei Tragflügel entsprechend). Dabei sind die Konstanten α und β aus den beiden Forderungen vorgegebenen Gesamtauftriebs und verschwindenden Rollmoments zu bestimmen.

Mit Hilfe der Gleichung (8) kann man auch hier sofort bis auf die noch offenen Konstanten die Lösung dieser Aufgabe hinschreiben. Nur bereitet jetzt die zahlenmäßige Auswertung der Integrale erheblich mehr Schwierigkeiten als für das Beispiel e). Deshalb soll hier von einer Durchrechnung abgesehen werden. Man kann sich jedoch über die Verhältnisse wenigstens qualitativ Klarheit verschaffen: Durch die zusätzliche Bedingung, daß die Rollmomente für die beiden Einzelflügel verschwinden müssen, werden sich für $s \neq 0$ die Zirkulationsverteilungen noch mehr den Ellipsen annähern. Weiter wird die neue W/W_0-Kurve über der bisherigen liegen, da der induzierte Widerstand sich nur vergrößern kann, wenn, wie hier, zusätzlich noch weitere Nebenbedingungen einzuhalten sind. Da für $s = \infty$ die elliptischen Teilauftriebsverteilungen auch die neue Forderung von selbst erfüllen, findet man hier dieselbe Auftriebsverteilung und also auch denselben Wert $W/W_0 = 2$. Der mutmaßliche Verlauf der Kurve W/W_0 ist in Abb. 5 skizziert, jedoch ist dabei der Punkt $s = 0$ exakt bestimmt. Die Forderung verschwindenden Rollmoments für jeden Einzelflügel lautet hier nämlich

$$\int_{-1}^{1} \Gamma(y)\left(|y| - \frac{1}{2}\right) dy = 0$$

und führt auf die Abwindbedingung $w(y) = \alpha_1 + \beta_1 |y|$ mit zwei noch offenen Konstanten α_1 und β_1. Die hierzu gehörige Auftriebsverteilung läßt sich nun geschlossen angeben und ist schon an anderer Stelle [2] berechnet worden. Die Konstantenbestimmung liefert

$$w(y) = \frac{3}{8} A \left[\frac{12}{\pi} - 4 + (3\pi - 8)|y|\right]$$

und

$$\Gamma(y) = \frac{3}{2\pi} A \left[(4 - \pi)\sqrt{1 - y^2} + (3\pi - 8)\, y^2 \log \frac{1 + \sqrt{1 - y^2}}{|y|}\right]$$

vgl. Abb.5. Dabei ist A der vorgeschriebene Gesamtauftrieb beider Flügel. Mit diesen Funktionen findet man schließlich

$$\frac{W}{W_0} = \frac{3}{8}(24 - 16\pi + 3\pi^2) = 1{,}2537\ldots,$$

wobei hier W_0 der Wert der elliptischen Auftriebsverteilung gemäß e) ist.

g) Die vorstehend abgeleiteten Formeln für Γ_ν und W lassen sich natürlich auch auf andere Probleme anwenden, so z. B. auf die zweite Grundaufgabe, die auf die *Prandtl*sche Integrodifferentialgleichung führt. Bei solchen Anwendungen wird es jedoch meist einfacher sein, bei gegebenen Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ die Zirkulationen $\Gamma_\nu(y_\nu)$ nicht exakt nach der Formel (8) zu berechnen, sondern Γ_ν in eine Reihe zu entwickeln, von der man dann, je nach der gewünschten Genauigkeit, mehr oder weniger Glieder berücksichtigt. Am zweckmäßigsten dürfte

[1] *K. Nickel*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951), S. 72.
[2] *K. Nickel*, a. a. O. (vorhergehende Fußnote) S. 77.

wohl für die meisten Fälle der folgende Ansatz sein:

$$\Gamma_\nu(\eta_\nu) = (-1)^\nu \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - \eta_\nu)(a_\lambda - \eta_\nu)}\,(\gamma_0 + \gamma_1\eta_\nu + \gamma_2\eta_\nu^2 + \cdots + \gamma_k\eta_\nu^k) \quad (\nu = 1, 2, \ldots n)\,, \tag{14}$$

wobei also die Beiwerte γ_μ der Reihe von der Tragflügelnummer unabhängig sind. Der Ansatz (14) entspricht vollkommen der im Falle $n = 1$ üblichen Setzung. Man kommt so auf sehr einfache Integrationsformeln, bei denen nur begreiflicherweise die Integrationskonstanten, die von den Tragflügelgrenzen a_ν und b_ν abhängen, für größere n recht komplizierte Ausdrücke werden (man kommt auch hierbei auf hyperelliptische Integrale). Sieht man jedoch von ihrer genauen Bestimmung ab, so findet man aus den vom Verfasser [1] angegebenen Formeln die sehr einfachen Ausdrücke

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\eta_\nu^k}{y_\mu - \eta_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda - \eta_\nu)(a_\lambda - \eta_\nu)}\, d\eta_\nu = (-1)^n\, P_{n+k}(y_\mu) \quad (k = 0, 1, \ldots) \tag{15}$$

(P_{n+k} ein normiertes Polynom vom Grade $n + k$) und

$$\frac{1}{\pi}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^\nu \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\eta_\nu^{n+k}}{y_\mu - \eta_\nu} \frac{d\eta_\nu}{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda - \eta_\nu)(a_\lambda - \eta_\nu)}} = (-1)^{n+1} \begin{cases} Q_k(y_\mu) & (k = 0, 1, \ldots) \\ 0 & (k = -n, \ldots, -1) \end{cases} \tag{16}$$

(Q_k ein normiertes Polynom vom Grade k). Setzt man (14) in (5) ein, so findet man mit (15) und (16)

$$w_\mu(y_\mu) = \frac{1}{4\pi}\sum_{\nu=1}^{n}\oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{d\Gamma_\nu(\eta_\nu)}{d\eta_\nu}\frac{d\eta_\nu}{y_\mu - \eta_\nu} = \frac{1}{4}\, R_{n-1+k}(y_\mu) \tag{17}$$

wo wieder R_{n-1+k} ein normiertes Polynom vom Grade $n - 1 + k$ ist.

Im jeweils vorliegenden Einzelfall lassen sich die Koeffizienten von R_{n-1+k} oft aus bekannten Nebenbedingungen, wie z. B. Symmetrieeigenschaften usw., ohne große Rechnung bestimmen. Jedoch muß man sich immer auf erheblich größere Rechenarbeit gefaßt machen, als im Falle $n = 1$. Denn für $k = 0$, also

$$\Gamma_\nu(\eta_\nu) = \gamma_0(-1)^\nu \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda - \eta_\nu)(a_\lambda - \eta_\nu)}\,,$$

erhält man aus (17) für die Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ schon ein „Nullpolynom" $(n-1)$-ten Grades, auf dessen Koeffizienten man keinen Einfluß besitzt. Man muß also im Ansatz (14) erst einmal eine Anzahl Glieder mitnehmen, nur um dieses Nullpolynom wieder zu kompensieren und benötigt darüber hinaus noch weitere Glieder, um die vorgegebenen Abwindgeschwindigkeiten $w_\mu(y_\mu)$ genügend genau annähern zu können.

3. Dünne Profile hintereinander. a) Ein Tragflügel erstrecke sich in Tiefenrichtung in Richtung der x-Achse von a bis b und werde von links mit der Geschwindigkeit u_∞ angeströmt (vgl. Abb. 6). Unter den Vernachlässigungen der Theorie der dünnen Profile [2] bestimmt sich dann die Stärke der Wirbelbelegung γ der x-Achse aus der Gleichung

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{2\pi u_\infty}\oint_a^b \frac{\gamma(\xi)}{\xi - x}\, d\xi\,. \tag{18}$$

Dabei ist $f(x)$ die bekannte Ordinate der „Profilskelettlinie" (vgl. Abb. 6). Die Integralgleichung (18) geht in die Gleichung (1) über, wenn man $df(x)/dx$ durch $w(y)$ und $\gamma(\xi)$ durch $-\frac{1}{2}u_\infty\, d\Gamma(\eta)/d\eta$ ersetzt. Also kann man auch hier die Auflösungsformel (2) gebrauchen. Nur ist jetzt darauf zu achten, daß $\gamma(\xi)$ wegen der *Joukowski*schen Abflußbedingung so zu bestimmen ist, daß keine Umströmung der Hinterkante eintritt, daß also $\gamma(b) = 0$ ist. Bestimmt man Γ in (2) aus dieser Forderung, so findet man folgende Auflösungsformel der Gleichung (18):

$$\gamma(\xi) = \frac{2u_\infty}{\pi}\sqrt{\frac{b-\xi}{\xi - a}}\oint_a^b \frac{df(x)}{dx}\frac{1}{\xi - x}\sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, dx\,. \tag{19}$$

[1] Siehe Fußnote [1] von S. 365. [2] *W. Birnbaum*, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), S. 290.

Wegen der *Kutta-Joukowski*schen Formel: Auftrieb $= \varrho \cdot u_\infty \cdot \gamma$ ($\varrho =$ Luftdichte) ist mit (19) bis auf einen konstanten Faktor auch schon die Auftriebsdichte bestimmt. Gesamtauftrieb und Längsmoment, etwa um den Punkt $x = 0$, ergeben sich aus (19) sofort durch Integration. Vertauscht man die Integrationsreihenfolge und führt die innere Integration aus, so findet man den Auftrieb

$$A = \varrho\, u_\infty \int_a^b \gamma(\xi)\, d\xi = -2\varrho\, u_\infty^2 \int_a^b \frac{df(x)}{dx} \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, dx \tag{20}$$

und das Längsmoment (um den Nullpunkt)

$$M_0 = \varrho\, u_\infty \int_a^b \gamma(\xi)\, \xi\, d\xi = 2\varrho\, u_\infty^2 \int_a^b \frac{df(x)}{dx} \left(\frac{b-a}{2} - x\right) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\, dx\,. \tag{21}$$

Aus den Formeln (19) bis (21) lassen sich sofort für beliebige Profilmittellinien $f(x)$ die wichtigsten Eigenschaften ablesen.

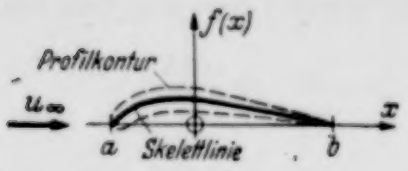


Abb. 6.

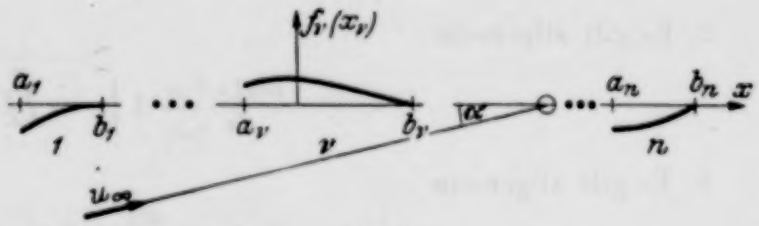


Abb. 7.

b) Entsprechend dem Schritt in Ziff. 2b, von einem zu n Tragflügeln kann man auch hier zu n hintereinanderliegenden Profilen übergehen. Führt man die entsprechende Bezeichnungsweise wie dort ein (vgl. Abb. 7), so ersetzen sich die Gleichungen (18) bis (21) durch

$$\frac{df_\mu(x_\mu)}{dx_\mu} = \frac{1}{2\pi u_\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\gamma_\nu(\xi_\nu)}{\xi_\nu - x_\mu}\, d\xi_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots n) \tag{22}$$

mit der Auflösung

$$\gamma_\nu(\xi_\nu) = \frac{2u_\infty}{\pi} \sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{b_\varkappa - \xi_\nu}{a_\varkappa - \xi_\nu}} \sum_{\mu=1}^{n} \oint_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{df_\mu(x_\mu)}{dx_\mu} \frac{1}{\xi_\nu - x_\mu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - x_\mu}{b_\lambda - x_\mu}}\, dx_\mu \quad (\nu = 1, 2, \ldots n) \tag{23}$$

und dem Gesamtauftrieb

$$A = \varrho\, u_\infty \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\xi_\nu)\, d\xi_\nu = -2\varrho\, u_\infty^2 \sum_{\mu=1}^{n} \int_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{df_\mu(x)_\mu}{dx_\mu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - x_\mu}{b_\lambda - x_\mu}}\, dx_\mu \tag{24}$$

sowie dem Moment um den Nullpunkt

$$M_0 = \varrho\, u_\infty \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\xi_\nu)\, \xi_\nu\, d\xi_\nu = 2\varrho\, u_\infty^2 \sum_{\mu=1}^{n} \int_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{df_\mu(x_\mu)}{dx_\mu} \left[\frac{1}{2} \sum_{\varrho=1}^{n} (b_\varrho - a_\varrho) - x_\mu\right] \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - x_\mu}{b_\lambda - x_\mu}}\, dx_\mu\,. \tag{25}$$

c) Aus diesen Formeln (23) bis (25) sollen nun einige allgemeingültige Aussagen gefolgert werden (gültig im Rahmen der Theorie der dünnen Profile), die z. T. in Sonderfällen schon bekannt sind [1]. Ihr Beweis folgt in d).

Dabei ist unter dem Anstellwinkel α immer der Anstellwinkel aller Profile des Systems verstanden (vgl. Abb. 7); es soll also nicht etwa ein Einzelprofil aus dem Verband gelöst und die Wirkung einer Drehung dieses speziellen Profils untersucht werden. Zu Vereinfachung für einige der folgenden Aussagen soll ferner noch die Vereinbarung getroffen werden, daß die Hinterenden der einzelnen Profilskelettlinien alle auf einer Geraden liegen sollen. Diese Voraussetzung ist durchaus zulässig, denn in der Theorie der dünnen Profile kommt es, wie ein Blick auf die

[1] Man vergleiche für $n = 2$ etwa *R. Grammel*, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges. S. 76 ff. Braunschweig 1917, ferner *H. Söhngen*, Luftfahrt-Forsch. 17 (1940), S. 17. Siehe auch *K. Nickel*, Z. angew. Math. Mechan. 31 (1951), S. 297.

Gleichungen (22) und (23) lehrt, nur auf die Neigung f_ν' der Skelettlinie an, nicht dagegen auf ihre absolute Höhe f_ν. Man kann also innerhalb der getroffenen Voraussetzungen (geringe Höhendifferenzen der Skelettlinie) die einzelnen Flügel beliebig nach oben oder unten verschieben, kann also die obige Forderung $f_\nu(b_\nu) = 0$ immer erfüllen.

1. Auftriebsverteilung [1] $c_a(x) = 2\gamma(x)/u_\infty$, Gesamtauftrieb A und Moment M_0 sind linear im Anstellwinkel α, es gilt also

$$c_a(x_\nu) = c_{a_0}(x_\nu) + \alpha \frac{dc_a(x_\nu)}{d\alpha},$$

$$A \equiv c_a \frac{\varrho}{2} u_\infty^2 \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) = \left(c_{a_0} + \alpha \frac{dc_a}{d\alpha}\right) \frac{\varrho}{2} u_\infty^2 \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu),$$

$$M \equiv c_m \frac{\varrho}{2} u_\infty^2 \left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu)\right]^2 = \left(c_{m_0} + \alpha \frac{dc_m}{d\alpha}\right) \frac{\varrho}{2} u_\infty^2 \left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu)\right]^2.$$

2. Es gilt allgemein

$$\frac{dc_a(x_\nu)}{d\alpha} = 4 \sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{b_\varkappa - x_\nu}{a_\varkappa - x_\nu}}.$$

3. Es gilt allgemein

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = 2\pi.$$

4. Es gibt genau einen Profil-Neutralpunkt N (aerodynamic center), um den das Moment M anstellwinkelunabhängig wird, d. h.: bezogen auf N ist $dc_m/d\alpha = 0$. Man erhält diesen Neutralpunkt aus dem Schwerpunkt des homogen mit Masse belegten Flügelsystems, verschoben um $^1/_4$ der Summe der Flügeltiefen in Anströmrichtung.

5. Für $f_\nu(x_\nu) \geq 0$ ist ebenfalls $c_{a_0} \geq 0$. Dabei tritt das Gleichheitszeichen bei c_{a_0} nur für $f_\nu(x_\nu) \equiv 0$ ein. Oder: Legt man in Anblasrichtung durch den hintersten Punkt des Flügelsystems eine Gerade, so kann diese bei Gesamtauftrieb Null nie ausschließlich auf einer Seite des Systems liegen.

6. Wenn sich die Tangente der Flügelkonturen vom vordersten bis zum hintersten Punkt immer gleichsinnig weiterdreht, so ist $c_{m_0} \neq 0$ (c_m bezogen auf den Neutralpunkt). Oder: Druckpunktfestigkeit ohne Wendepunkt im Profil ist nicht möglich.

7. Sonderfall der Streckenprofile mit demselben Anstellwinkel: Für diese ist $c_{a_0}(x_\nu) = c_{a_0} = c_{m_0} = 0$. Der Gesamtauftrieb ist bei allen Anstellwinkeln derselbe, als wenn die einzelnen Flügel zu einem einzigen Flügel zusammengerückt wären; der Druckpunkt liegt im Neutralpunkt.

d) Der Beweis der ausgesprochenen Behauptungen 1 bis 7 kann wie folgt geführt werden:

1. Die Neigung der Skelettlinie $f(x)$ mit dem Anstellwinkel α wird durch

$$f'(x) - \alpha \tag{26}$$

angenähert. (Drehung des Koordinatensystems um den Winkel α, für die betrachteten kleinen Winkel α kann $\sin\alpha$ durch α und $\cos\alpha$ durch 1 ersetzt werden.) Aus der Linearität der Ausdrücke (23), (24) und (25) folgt damit sofort die Behauptung.

2. Setzt man (26) in (23) ein, so findet man

$$\frac{dc_a(\xi_\nu)}{d\alpha} = \frac{2}{u_\infty} \frac{d\gamma(\xi_\nu)}{d\alpha} = \frac{4}{\pi} \sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{b_\varkappa - \xi_\nu}{a_\varkappa - \xi_\nu}} \sum_{\mu=1}^{n} \oint_{a_\mu}^{b_\mu} \frac{1}{\xi_\nu - x_\mu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - x_\mu}{b_\lambda - x_\mu}}\, dx_\mu$$

$$= 4 \sqrt{-\prod_{\varkappa=1}^{n} \frac{b_\varkappa - \xi_\nu}{a_\varkappa - \xi_\nu}}$$

nach Formel (32) [vgl. Ziff. 4d)].

[1] Die Verwendung von $c_a(x)$ zur Kennzeichnung der örtlichen Auftriebsdichte und von c_a als Beiwert des Gesamtauftriebs wird kaum zu Mißverständnissen Anlaß geben. In der Theorie der tragenden Linie wird ebenfalls seit langem schon c_a als Beiwert des Gesamtauftriebs neben $c_a(y)$ als örtlichem Auftriebsbeiwert benutzt.

3. Setzt man (26) in (24) ein, so kommt mit (29) aus Ziff. 4 d)

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = \frac{4}{\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu)} \sum_{\mu=1}^{n} \int_{a_\mu}^{b_\mu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - x_\mu}{b_\lambda - x_\mu}}\, dx_\mu = 2\pi .$$

4. Die Abszisse des Neutralpunktes sei x_N. Für das Moment um diesen Punkt findet man dann aus (25) und (26)

$$\frac{dM_N}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \varrho\, u_\infty \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\xi_\nu)\,[\xi_\nu - x_N]\, d\xi_\nu =$$

$$= -2\,\varrho\, u_\infty^2 \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \left[\xi_\nu - x_N - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}(b_\mu - a_\mu)\right] \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\nu}{b_\lambda - \xi_\nu}}\, d\xi_\nu$$

und nach (29) und (30) aus Ziff. 4 d)

$$\frac{dM_N}{d\alpha} = -\pi\,\varrho\, u_\infty^2 \left\{ \frac{1}{4}\left[\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu)\right]^2 + \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu^2 - a_\nu^2) - \right.$$

$$\left. - \left[x_N + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}(b_\mu - a_\mu)\right] \sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu) \right\}$$

$$= \pi\,\varrho\, u_\infty^2 \left\{ x_N \sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu) + \frac{1}{4}\left[\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu)\right]^2 - \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu^2 - a_\nu^2) \right\} .$$

Soll nun $dM_N/d\alpha = 0$ sein, so findet man hieraus, daß das nur für

$$x_N = \frac{1}{2}\,\frac{\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu^2 - a_\nu^2)}{\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu)} - \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{n}(b_\nu - a_\nu)$$

möglich ist. Hierin stellt das erste Glied den Schwerpunkt des Tragflügelsystems dar, wenn man sich die Strecken (a_ν, b_ν) gleichmäßig mit Masse belegt denkt, der zweite Summand ist ein Viertel der Summe der Flügeltiefen.

5. Durch partielle Integration aus (24) erhält man

$$A = -2\,\varrho\, u_\infty^2 \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{df_\nu(x_\nu)}{dx_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - x_\nu}{b_\lambda - x_\nu}}\, dx_\nu = 2\,\varrho\, u_\infty^2 \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} f_\nu(x_\nu)\, \frac{d}{dx_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - x_\nu}{b_\lambda - x_\nu}}\, dx_\nu ,$$

falls $f_\nu(b_\nu) = 0$ ist, wie eingangs verabredet wurde. Der Ausdruck

$$\frac{d}{dx_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - x_\nu}{b_\lambda - x_\nu}}$$

im Integranden des letzten Integrals ist längs der Flügel überall > 0, wie in Ziff. 4 b) bewiesen werden wird. Also ist das Vorzeichen von $f_\nu(x_\nu)$ für das Vorzeichen von A und damit von c_{a_0} verantwortlich. Insbesondere kann offensichtlich $c_{a_0} = 0$ unter der Bedingung $f_\nu \geqq 0$ nur im Falle $f_\nu \equiv 0$ eintreten.

6. Nach (24), (25) und 4. ist das Drehmoment um den Neutralpunkt

$$M_N = \varrho\, u_\infty \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \gamma_\nu(\xi_\nu)\,(\xi_\nu - x_N)\, d\xi_\nu =$$

$$= -2\,\varrho\, u_\infty^2 \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{df_\nu}{d\xi_\nu} \left[\xi_\nu - \frac{1}{2}\,\frac{\sum_{\varrho=1}^{n}(b_\varrho^2 - a_\varrho^2)}{\sum_{\varrho=1}^{n}(b_\varrho - a_\varrho)} - \frac{1}{4}\sum_{\varrho=1}^{n}(b_\varrho - a_\varrho) \right] \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\nu}{b_\lambda - \xi_\nu}}\, d\xi_\nu .$$

Dieser Ausdruck soll durch partielle Integration umgeformt werden. Dazu setzt man zur Abkürzung

$$U(x_\mu)=\sum_{\nu=1}^{\mu-1}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\cdots+\int_{a_\mu}^{x_\mu}\left[\xi_\mu-\frac{1}{2}\frac{\sum_{\varrho=1}^{n}(b_\varrho^2-a_\varrho^2)}{\sum_{\varrho=1}^{n}(b_\varrho-a_\varrho)}-\frac{1}{4}\sum_{\varrho=1}^{n}(b_\varrho-a_\varrho)\right]\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}\frac{a_\lambda-\xi_\mu}{b_\lambda-\xi_\mu}}\,d\xi_\mu\,. \tag{27}$$

Weiter soll im folgenden zugelassen werden, daß die Profilskelettlinien in endlich vielen Punkten geknickt sind. Seien dies die Stellen c_{μ_ν} ($\nu=1,2,\ldots,m_\mu$; $\mu=1,2,\ldots,n$), so daß also $f'_{\mu+}(c_{\mu_\nu})\neq f'_{\mu-}(c_{\mu_\nu})$ ist (unter f'_+ und f'_- sei die obere bzw. untere Ableitung an der betrachteten Stelle verstanden). Partielle Integration von M_N liefert dann

$$M_N=2\varrho u_\infty^2\left\{\sum_{\nu=1}^{n}\int_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{d^2f_\nu}{dx_\nu^2}U(x_\nu)\,dx_\nu+\sum_{\nu=2}^{n}U(a_\nu)\left[f'_\nu(a_\nu)-f'_\nu(b_{\nu-1})\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{m_\mu}U(c_{\mu_\nu})\left[f'_{\mu+}(c_{\mu_\nu})-f'_{\mu-}(c_{\mu_\nu})\right]\right\}, \tag{28}$$

wenn man beachtet, daß $U(a_\nu)=U(b_{\nu-1})$ ($\nu=2,3,\ldots n$) ist und daß $U(a_1)=U(b_n)=0$ gilt. Dreht sich nun die Tangente der Skelettlinie gleichsinnig beim Fortschreiten von a_1 nach b_n, etwa im mathematisch positiven Sinne (Profile nach oben gewölbt), so ist überall

$$\frac{d^2f_\nu}{dx_\nu^2}<0\,,\quad f'_\nu(a_\nu)\leq f'_\nu(b_{\nu-1})$$

und $$f'_{\mu+}(c_{\mu_\nu})<f'_{\mu-}(c_{\mu_\nu})\,.$$

Wie in Ziff. 4c) gezeigt wird, ist nun immer $U(y_\mu)\leq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $y_\mu=a_1$ und $y_\mu=b_n$ eintritt. Nach Gleichung (28) wird dann auch $M_N\geq 0$ und damit auch $c_{m_0}\geq 0$. Dabei kann das Gleichheitszeichen offenbar nur für $f\equiv 0$ eintreten.

7. Für die Streckenprofile gilt $f_\nu(x_\nu)\equiv 0$, also wird (26) zu $-\alpha$. Setzt man (26) in (23), (24) und (25) ein, so kommen mit (29) aus Ziff. 4d) sofort die Behauptungen.

e) Als Beispiel soll ein Doppelflügel betrachtet werden, der sich von $x=0$ bis $x=3$ und von $x=4$ bis $x=5$ erstreckt (vgl. Abb. 8). Die Profilmittellinie sei innerhalb dieser beiden Strecken gegeben durch

$$f(x)=x\,(3\,x^3-20\,x^2-147\,x+678)\,.$$

Mit den Formeln (32) bis (35) des mathematischen Anhangs ergeben sich dann die in Abb. 8 dargestellten Verteilungen für $c_{a_0}(x)$ und $dc_a(x)/d\alpha$. Die Profilmittellinie ist so gewählt, daß $c_{a_0}(x)$ gleichzeitig an den beiden Eintrittskanten $x=0$ und $x=4$ verschwindet (stoßfreier Eintritt).

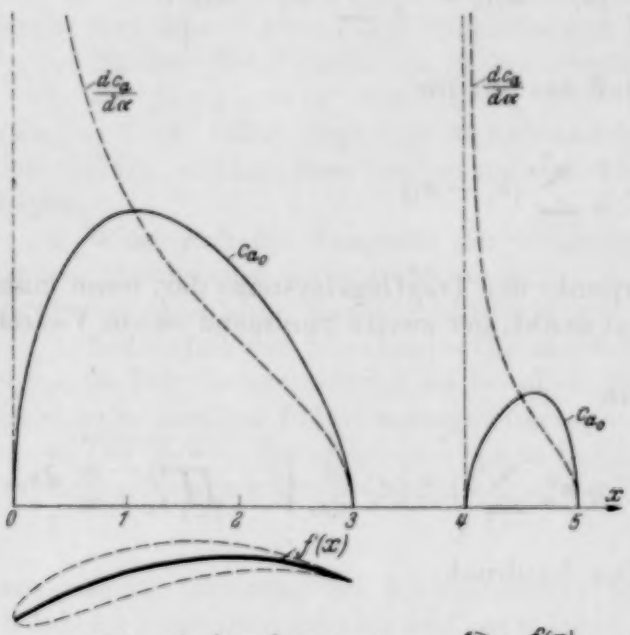


Abb. 8.

4. Mathematischer Anhang. a) Behauptung: Für folgende Determinante gilt

$$D\equiv\left\|\int_{a_\nu}^{b_\nu}\frac{\eta_\nu^{\varrho-1}}{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n}(b_\lambda-\eta_\nu)\,(a_\lambda-\eta_\nu)}}\,d\eta_\nu\right\|>0\qquad(\nu,\varrho=1,2,\ldots n)\,.$$

Beweis: Bekanntlich gilt für die *Vandermonde*sche Determinante [1]

$$\left\| \eta_\nu^{\varrho-1} \right\| = \prod_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu<\nu}}^{n} (\eta_\nu - \eta_\mu) > 0 .$$

Also ist auch

$$\left\| \frac{\eta_\nu^{\varrho-1}}{\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - \eta_\nu)(a_\lambda - \eta_\nu)}} \right\| = \frac{\prod\limits_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu<\nu}}^{n} (\eta_\nu - \eta_\mu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \sqrt{-\prod\limits_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - \eta_\nu)(a_\lambda - \eta)}} > 0 ,$$

und damit wird

$$D \equiv \left\| \int_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\eta_\nu^{\varrho-1}}{\sqrt{-\prod\limits_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - \eta_\nu)(a_\lambda - \eta_\nu)}} \, d\eta_\nu \right\| = \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_n}^{b_n} \frac{\prod\limits_{\substack{\mu,\nu=1 \\ \mu<\nu}}^{n} (\eta_\nu - \eta_\mu)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \sqrt{-\prod\limits_{\lambda=1}^{n} (b_\lambda - \eta_\nu)(a_\lambda - \eta_\nu)}} \, d\eta_1 \cdots d\eta_n > 0 .$$

b) Behauptung:

$$\frac{d}{dx_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - x_\nu}{b_\lambda - x_\gamma}} > 0 .$$

Beweis: Offenbar genügt es, nachzuweisen, daß gilt

$$\frac{d}{dx_\nu} \prod_{\lambda=1}^{n} \left| \frac{a_\lambda - x_\nu}{b_\lambda - x_\nu} \right| > 0 .$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt immer für $\bar{x}_\nu > x_\nu$ und alle $\nu = 1, 2, \ldots n$

$$\left| \frac{a_\lambda - \bar{x}_\nu}{b_{\lambda-1} - \bar{x}_\nu} \right| > \left| \frac{a_\lambda - x_\nu}{b_{\lambda-1} - x_\nu} \right| \qquad (\lambda = 2, 3, \ldots n) ,$$

$$|a_1 - \bar{x}_\nu| > |a_1 - x_\nu| ,$$

$$\frac{1}{|b_n - \bar{x}_\nu|} > \frac{1}{|b_n - x_\nu|} .$$

Daraus erhält man sofort durch Produktbildung

$$\prod_{\lambda=1}^{n} \left| \frac{a_\lambda - \bar{x}_\nu}{b_\lambda - \bar{x}_\nu} \right| > \prod_{\lambda=1}^{n} \left| \frac{a_\lambda - x_\nu}{b_\lambda - x_\nu} \right| ,$$

und dies ist nur eine andere Schreibweise für die obige Behauptung.

c) Man setzt

$$U(x_\mu) \equiv \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \cdots + \int_{a_\mu}^{x_\mu} [\xi_\mu - x_{N_h}] \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\mu}{b_\lambda - \xi_\mu}} \, d\xi_\mu$$

mit

$$x_{N_h} = \frac{1}{2} \frac{\sum\limits_{\varrho=1}^{n} (b_\varrho^2 - a_\varrho^2)}{\sum\limits_{\varrho=1}^{n} (b_\varrho - a_\varrho)} + \frac{1}{4} \sum_{\varrho=1}^{n} (b_\varrho - a_\varrho)$$

(x_{N_h} entspricht im Falle $n = 1$ der hintere Neutralpunkt).

Behauptung: Es gilt immer $U(x_\mu) \leq 0$, wobei das Gleichheitszeichen nur für $x_\mu = a_1$ und $x_\mu = b_n$ eintritt.

---

[1] *P. B. Fischer*, Determinanten, S. 115—116. Berlin u. Leipzig 1932.

Beweis: Der Integrand ist am linken Ende des Integrationsbereichs (bei a_1) negativ, wechselt bei x_{N_k} das Vorzeichen und ist bei b_n positiv. Es soll gezeigt werden, daß $U(b_n) = 0$ ist. Damit gilt dann automatisch $U(x_\mu) < 0$ für x_μ zwischen a_1 und b_n. Da nach Setzung noch $U(a_1) = 0$ ist, ist damit die Behauptung bewiesen.

Es gilt nach (29) und (30)

$$U(b_n) = \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \xi_\mu \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\mu}{b_\lambda - \xi_\mu}}\, d\xi_\mu - x_{N_k} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\mu}{b_\lambda - \xi_\mu}}\, d\xi_\mu$$

$$= \pi \left\{ \frac{1}{8} \left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \right]^2 + \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu^2 - a_\nu^2) - \frac{1}{2} x_{N_k} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \right\} = 0 .$$

d) Für numerische Rechnungen können manchmal die nachfolgenden Formeln von Nutzen sein, deren Beweis jedoch nicht gebracht werden soll. Ihre Herleitung ist vom Verfasser [1] gebracht oder lehnt sich eng an die dortigen Gedankengänge an:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \left(\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\nu}{b_\lambda - \xi_\nu}} \right)^{\pm 1} d\xi_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) , \tag{29}$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \xi_\nu \left(\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\nu}{b_\lambda - \xi_\nu}} \right)^{\pm 1} d\xi_\nu = \pm \frac{1}{8} \left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \right]^2 + \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu^2 - a_\nu^2) , \tag{30}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{a_\nu}^{b_\nu} \xi_\nu^2 \left(\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\nu}{b_\lambda - \xi_\nu}} \right)^{\pm 1} d\xi_\nu &= \frac{1}{48} \left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \right]^3 \pm \\ &\pm \frac{1}{8} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \sum_{\mu=1}^{n} (b_\mu^2 - a_\mu^2) + \frac{1}{6} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu^3 - a_\nu^3) , \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{1}{x_\mu - \xi_\nu} \left(\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\nu}{b_\lambda - \xi_\nu}} \right)^{\pm 1} d\xi_\nu = \mp 1 , \tag{32}$$

$$\frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\xi_\nu}{x_\mu - \xi_\nu} \left(\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\nu}{b_\lambda - \xi_\nu}} \right)^{\pm 1} d\xi_\nu = \mp x_\mu - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) , \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\xi_\nu^2}{x_\mu - \xi_\nu} \left(\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\nu}{b_\lambda - \xi_\nu}} \right)^{\pm 1} d\xi_\nu &= \mp x_\mu^2 - \frac{1}{2} x_\mu \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \mp \\ &\mp \frac{1}{8} \left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \right]^2 - \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu^2 - a_\nu^2) , \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{\nu=1}^{n} \oint_{a_\nu}^{b_\nu} \frac{\xi_\nu^3}{x_\mu - \xi_\nu} \left(\sqrt{-\prod_{\lambda=1}^{n} \frac{a_\lambda - \xi_\nu}{b_\lambda - \xi_\nu}} \right)^{\pm 1} d\xi_\nu &= \mp x_\mu^3 - \frac{1}{2} x_\mu^2 \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \mp \\ \mp \frac{1}{8} x_\mu \left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \right]^2 - \frac{1}{4} x_\mu \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu^2 - a_\nu^2) - \frac{1}{48} \left[\sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \right]^3 \mp & \\ \mp \frac{1}{8} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu - a_\nu) \sum_{\mu=1}^{n} (b_\mu^2 - a_\mu^2) - \frac{1}{6} \sum_{\nu=1}^{n} (b_\nu^3 - a_\nu^3) . & \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

(Eingegangen am 7. April 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Karl Nickel*, Instituto Aerotecnico, Córdoba, Argentinien

[1] *K. Nickel*, Math. Z. 54 (1951), S. 89 ff.

Kritische Drehzahlen unter Torsion und Druck.

Von H. Ziegler.

1. Einleitung. Die kritischen Drehzahlen einer Welle sind von ihrer Beanspruchung abhängig. So ist z. B. bei der fliegenden Welle (Abb. 1), die am einen Ende in einem langen Lager drehbar, am anderen durch eine Scheibe besetzt und auf Druck D sowie auf Torsion W beansprucht ist, die kritische Winkelgeschwindigkeit ω_k eine Funktion von D und W. Bei der Untersuchung dieses Zusammenhangs ist *R. Grammel*[1], der erstmals das Torsionsmoment berücksichtigt hat, von der Annahme ausgegangen, daß der Momentvektor des äußeren Kräftepaares bei der Verbiegung der elastischen Linie axial gerichtet bleibe. Diese Voraussetzung ist bei einer in ihrer Ebene beaufschlagten Turbinenscheibe näherungsweise erfüllt, da sich hier die vom einzelnen Gasstrahl ausgeübte Kraft bei der Deformation der Welle kaum verlagert. Ein solcher axialer Momentvektor ist nichtkonservativ[2], und damit hängt zusammen, daß sich unter gewissen Randbedingungen (z. B. im Fall von Abb. 1) für $W \neq 0$ jede Drehzahl als kritisch herausstellt[3,4].

Axiale Momentvektoren kommen indessen äußerst selten vor. Bei der viel häufigeren schiefen oder axialen Beaufschlagung einer Turbinenscheibe tritt neben einer Druckkraft ein Kräftepaar auf, dessen Momentvektor sich bei der Deformation schief stellt, da sich die ihn erzeugenden Einzelkräfte (Abb. 2), auch wenn sie nach Betrag und Richtung als konstant vorausgesetzt werden dürfen, mit der Scheibe verlagern und damit keine festen Wirkungslinien besitzen.

Abb. 1. Fliegende Welle unter einer Druckkraft und einem axialen Moment.

Bei der Behandlung des analogen Knickproblems (das mit $\omega = 0$ aus der Drehzahlaufgabe erhalten wird) hat der Verfasser[5] gezeigt, daß im wesentlichen zwischen drei Fällen zu unterscheiden ist, die als pseudo-, quasi- und semitangential bezeichnet worden und konservativ sind, und *W. T. Koiter*[6] hat seither einen Fall behandelt, der als Sonderfall des pseudotangentialen aufgefaßt werden kann. Das pseudotangentiale Moment, das durch zwei, an einem starren Querbalken angreifende, konstante Kräfte realisiert wird, scheidet bei Turbinenscheiben aus; ebenso das *Koiter*sche, in Kreuzgelenken auftretende Moment. Dagegen kommt bei doppelt beaufschlagten Scheiben (Abb. 2b) das durch ein einziges Kräftepaar erzeugte quasitangentiale Moment und bei mehrfach bis gleichmäßig beaufschlagten Scheiben (Abb. 2a) das semitangentiale Moment vor, das einer gleichmäßigen Verteilung von mehr als zwei gleichgroßen Umfangskräften entspricht. Ist die elastische Linie durch $x(z)$, $y(z)$, ihre Neigung durch $x'(z)$, $y'(z)$, die Abszisse der Scheibe durch z_1 und das an dieser angreifende Moment vor der Deformation durch W gegeben, so hat das quasitangentiale Moment an der deformierten Welle unter der Voraussetzung, daß die beiden Einzelkräfte der y-Achse parallel seien, in erster Näherung die Komponenten[5]

$$\mathfrak{W} = W(x_1', 0, 1)\,. \tag{1.1}$$

Im semitangentialen Fall dagegen wird es — unabhängig von der Orientierung der Koordinatenachsen — durch

$$\mathfrak{W} = W\left(\frac{1}{2}\,x_1', \frac{1}{2}\,y_1', 1\right) \tag{1.2}$$

dargestellt.

---

[1] *R. Grammel*, Der Einfluß der Wellentorsion auf die kritische Drehzahl. Stodola-Festschrift S. 180, Zürich und Leipzig 1929; vgl. auch *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 796, Berlin 1939.

[2] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Mechan. 31 (1951), S. 266.

[3] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 2 (1951), S. 265.

[4] *A. Troesch*, Ing. Arch. 20 (1952), S. 258.

[5] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 3 (1952), S. 96.

[6] *W. T. Koiter*, Proc. Koninklijke Akad. d. Wetenschappen, erscheint demnächst.

Nachdem sich[1] gezeigt hat, daß schon bei der Knickaufgabe die kritische Belastung von der Art des äußeren Momentes abhängt, sind auch beim Drehzahlproblem unter einem quasi- oder semitangentialen Moment (d. h. bei zwei- oder mehrfach, nicht in ihren Ebenen beaufschlagten Scheiben) verschiedene und zudem andere kritische Winkelgeschwindigkeiten zu erwarten als unter einem axialen. Zweck dieser Arbeit ist ihre Berechnung, und zwar unter Beschränkung auf einige besonders einfach gelagerte zylindrische Wellen mit zwei gleichen Biegesteifigkeiten, auf eine einzige Scheibe und auf Belastungen, die im Vergleich zur statischen Knicklast klein sind.

Die Gesamtheit der bei der Untersuchung kritischer Drehzahlen auftretenden Fragen läßt sich nur auf kinetischem Wege befriedigend beantworten. Der Rotor soll daher als Schwinger aufgefaßt und auf ein ortsfestes Koordinatensystem bezogen werden. Diese von der üblichen abweichende Behandlungsweise wird gestatten, nebenbei einige Fragen zu klären, die außerhalb des engeren Problemkreises liegen.

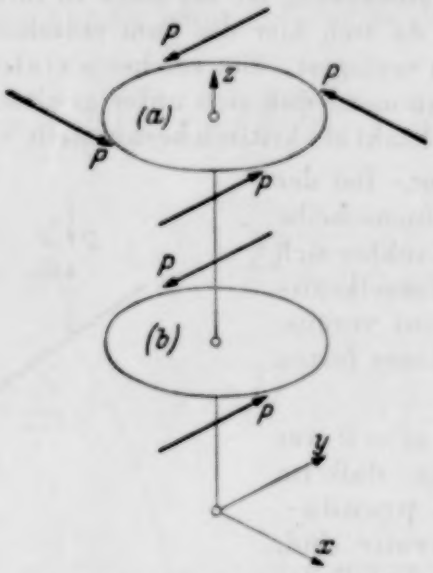


Abb. 2. Gleichmäßige Beaufschlagung durch a mehr als zwei Kräfte (semitangentiales Moment), b zwei Kräfte (quasitangentiales Moment).

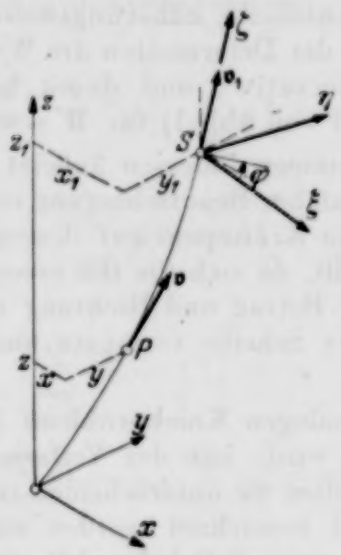


Abb. 3. Elastische Linie im kritischen Zustand.

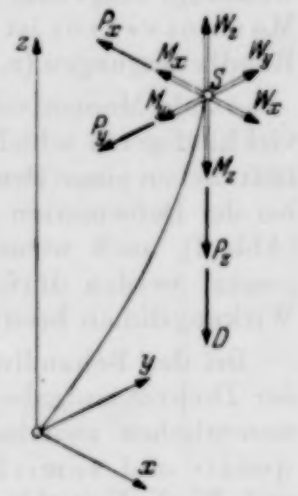


Abb. 4. Kräftespiel an der Scheibe.

2. Die Bewegungsdifferentialgleichungen. Die in Abb. 3 durch ihre elastische Linie dargestellte Welle sei als masselos, torsions- und drucksteif vorausgesetzt. Sie besitze zwei gleichgroße Biegesteifigkeiten und sei beliebig, aber um ihre Achse reibungsfrei drehbar gelagert. In S sei eine starre Scheibe aufgesetzt, und zwar zunächst ohne jeden Zentrierungsfehler, so daß sie als symmetrischer Kreisel mit zur elastischen Linie tangentialer Figurenachse aufgefaßt werden kann.

Die z-Achse des ortsfesten Koordinatensystems falle mit der geraden Stabachse zusammen. Da man sich auf kleine Deformationen beschränken darf, kann man die axialen Verschiebungen der Punkte P der elastischen Linie vernachlässigen und die Verschiebungen $x(z)$, $y(z)$ normal zur Achse samt den Neigungen $x'(z)$, $y'(z)$ als klein betrachten. Der tangentiale Einheitsvektor $\mathfrak{v}$ in P hat dann in erster Näherung die Komponenten $v_x = x'$, $v_y = y'$, $v_z = 1$.

Führt man als zweites Bezugsystem dasjenige Hauptachsensystem der Scheibe ein, dessen ζ-Achse den tangentialen Einheitsvektor $\mathfrak{v}_1$ enthält und dessen ξ-Achse zur (x, z)-Ebene parallel ist, so ist seine η-Achse in erster Näherung parallel zur (y, z)-Ebene. Mißt man die Drehung der Scheibe im Hauptachsensystem durch den auf die ξ-Achse bezogenen Winkel φ, so ist ihre Lage durch die Koordinaten x_1, y_1, v_{1x}, v_{1y}, φ bestimmt, während ihr Bewegungszustand durch die Translationsgeschwindigkeiten $\dot{x}_1$, y_1 sowie die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}\,(u_x, u_y, u_z)$ beschrieben werden kann. Da die zeitliche Änderung von $\mathfrak{v}_1$ durch $\dot{\mathfrak{v}}_1 = \mathfrak{u} \times \mathfrak{v}_1$ gegeben ist, gelten die Beziehungen

$$\dot{v}_{1x} = u_y - v_{1y}\, u_z\,, \qquad \dot{v}_{1y} = -\,u_x + v_{1x}\, u_z\,, \tag{2.1}$$

und diesen entnimmt man insbesondere, daß u_x und u_y von erster Ordnung klein sind.

---

[1] Siehe Fußnote S. 5 auf S. 377.

Für einen beliebigen Vektor $\mathfrak{a}$, dessen erste und zweite Komponente klein sind, gelten[1] in erster Näherung die Transformationen

$$a_\xi = a_x - v_{1x}\, a_z\,, \qquad a_\eta = a_y - v_{1y}\, a_z\,, \qquad a_\zeta = a_z\,. \tag{2.2}$$

Durch Anwendung derselben auf die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{u}$ erhält man mit Rücksicht auf (2.1)

$$u_\xi = -\dot{v}_{1y}\,, \qquad u_\eta = \dot{v}_{1x}\,, \qquad u_\zeta = u_z = \varphi\,. \tag{2.3}$$

Führt man mit m die Masse, mit C das axiale und mit A das äquatoriale Trägheitsmoment der Scheibe für den Schwerpunkt S ein, so ist ihr Drall bezüglich S im Hauptachsensystem durch $\mathfrak{D}\,(A\,u_\xi,\ A\,u_\eta,\ C\,u_\zeta)$ und nach (2.2), (2.3) im ortsfesten System durch

$$\left.\begin{aligned} D_x &= D_\xi + v_{1x}\, D_\zeta = -A\,\dot{v}_{1y} + C\dot{\varphi}\,v_{1x}\,,\\ D_y &= D_\eta + v_{1\eta}\, D_\zeta = \ \ A\,\dot{v}_{1x} + C\,\dot{\varphi}\,v_{1y}\,,\\ D_z &= D_\zeta \qquad\qquad\ = \ \ C\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

gegeben.

Abb. 4 zeigt die in S angreifenden Kräfte, nämlich die aus der Axialkraft D und dem Moment $\mathfrak{W}\,(W_x,\ W_y,\ W_z)$ bestehende Belastung sowie die von der Welle herrührende Dyname $\mathfrak{P}\,(P_x,\ P_y,\ P_z)$, $\mathfrak{M}\,(M_x,\ M_y,\ M_z)$. Formuliert man damit den Impuls- sowie den Drallsatz für die Scheibe, so erhält man neben der Beziehung

$$P_z = -D \tag{2.5}$$

die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} m\,\ddot{x}_1 &= -P_x\,,\\ m\,\ddot{y}_1 &= -P_y\,,\\ -A\,\ddot{v}_{1y} + C\,(\varphi\,\dot{v}_{1x} + \ddot{\varphi}\,v_{1x}) &= W_x - M_x\,,\\ A\,\ddot{v}_{1x} + C\,(\dot{\varphi}\,\dot{v}_{1y} + \ddot{\varphi}\,v_{1y}) &= W_y - M_y\,,\\ C\,\ddot{\varphi} &= W_z - M_z\,. \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

3. Die unbelastete Welle. Ist die Scheibe unbelastet, so wird in (2.5) $D = 0$ und in (2.6) $W_x = W_y = W_z = 0$. Bei stationärem Betrieb[2] ist ferner $M_z = 0$, nach der letzten Gleichung (2.6) mithin $\ddot{\varphi} = 0$, $\dot{\varphi} = \omega$ und $\varphi = \omega t$, so daß sich das System (2.6) auf

$$\left.\begin{aligned} m\,\ddot{x}_1 &= -P_x\,, & -A\,\ddot{v}_{1y} + C\,\omega\,\dot{v}_{1x} &= -M_x\,,\\ m\,\ddot{y}_1 &= -P_y\,, & A\,\ddot{v}_{1x} + C\,\omega\,\ddot{v}_{1y} &= -M_y \end{aligned}\right\} \tag{3.1}$$

reduziert.

Die rechten Seiten von (3.1) lassen sich mit Hilfe der Einflußzahlen[3] durch die Lagekoordinaten der Scheibe ausdrücken. Ist nämlich α die Durchbiegung an der Stelle z_1 unter einer hier wirkenden Einheitskraft, β die Neigung unter einem Einheitsmoment, γ diejenige unter einer Einheitskraft und gleichzeitig die Durchbiegung unter einem Einheitsmoment, so gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha\,P_x + \gamma\,M_y\,, & y_1 &= \alpha\,P_y - \gamma\,M_x\,,\\ v_{1x} &= \gamma\,P_x + \beta\,M_y\,, & v_{1y} &= \gamma\,P_y - \beta\,M_x\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Ihre Umkehrungen schreiben sich mit der positiven[4] Determinate

$$\Delta = \alpha\,\beta - \gamma^2 \tag{3.3}$$

in der Form

$$\left.\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{\Delta}\,(\beta\,x_1 - \gamma\,v_{1x})\,, & M_x &= \frac{1}{\Delta}\,(\gamma\,y_1 - \alpha\,v_{1y})\,,\\ P_y &= \frac{1}{\Delta}\,(\beta\,y_1 - \gamma\,v_{1y})\,, & M_y &= \frac{1}{\Delta}\,(-\gamma\,x_1 + \alpha\,v_{1x})\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

---

[1] Siehe die in Fußnote 3 von S. 377 zitierte Arbeit, Gl. (4.1).

[2] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 777.

[3] *R. Grammel*, Der Kreisel, seine Theorie und seine Anwendungen, Bd. II, S. 19. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

[4] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 89.

und damit läßt sich die Formänderungsenergie

$$U = \frac{1}{2}\,(P_x\,x_1 + P_y\,y_1 + M_y\,v_{1x} - M_x\,v_{1y})$$

der Welle beiläufig auf die Gestalt

$$U = \frac{1}{2\,\Delta}\,[\beta\,(x_1^2 + y_1^2) - 2\,\gamma\,(x_1\,v_{1x} + y_1\,v_{1y}) + \alpha\,(v_{1x}^2 + v_{1y}^2)] \tag{3.5}$$

bringen.

Setzt man (3.4) in (3.1) ein, so erhält man das homogene Differentialgleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} m\,\ddot{x}_1 + \frac{\beta}{\Delta}\,x_1 - \frac{\gamma}{\Delta}\,v_{1x} &= 0\,,\\ m\,\ddot{y}_1 + \frac{\beta}{\Delta}\,y_1 - \frac{\gamma}{\Delta}\,v_{1y} &= 0\,,\\ -A\,\ddot{v}_{1y} + C\,\omega\,\dot{v}_{1x} + \frac{\gamma}{\Delta}\,y_1 - \frac{\alpha}{\Delta}\,v_{1y} &= 0\,,\\ A\,\ddot{v}_{1x} + C\,\omega\,\dot{v}_{1y} - \frac{\gamma}{\Delta}\,x_1 + \frac{\alpha}{\Delta}\,v_{1x} &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Dieses System kann als Ausdruck des Impuls- und Drallsatzes für die nichtrotierende Scheibe unter den verallgemeinerten Kräften

$$Q_{v_{1x}} = -\,C\,\omega\,\dot{v}_{1y}\,, \qquad Q_{v_{1y}} = C\,\omega\,\dot{v}_{1x} \tag{3.7}$$

gedeutet werden; denn wenn man (3.5), (3.7) sowie die Bewegungsenergie

$$T = \frac{m}{2}\,(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{A}{2}\,(\dot{v}_{1x}^2 + \dot{v}_{1y}^2) \tag{3.8}$$

in die *Lagrange*schen Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q} + Q_q\,, \qquad (q = x_1,\ y_1,\ v_{1x},\ v_{1y})$$

einsetzt, erhält man in der Tat (3.6). Da U positiv definit und die Leistung des durch die verallgemeinerten Kräfte (3.7) dargestellten Kreiselmomentes

$$L = Q_{v_{1x}}\,\dot{v}_{1x} + Q_{v_{1y}}\,\dot{v}_{1y} = 0$$

ist, repräsentiert (3.6) die Bewegung eines konservativen, wenn auch gyroskopischen Systems mit positiv definiter potentieller Energie. Ein solches ist[1] aber stets stabil, und daraus folgt ohne Ausrechnung, daß das allgemeinste Integral von (3.6) beschränkt und damit ungefährlich ist.

Um das Auftreten von kritischen Drehzahlen zu erklären, müssen die Zentrierungsfehler der Scheibe berücksichtigt werden. Dies geschieht üblicherweise dadurch, daß man sich den Schwerpunkt der Scheibe in ihrer Mittelebene verschoben denkt, so daß er nicht mehr mit dem Durchstoßpunkt der elastischen Linie (Abb. 3) zusammenfällt. Man kann statt dessen auch einige kleine Zusatzmassen einführen, und wenn man diese außerhalb der Scheibenmittelebene annimmt, berücksichtigt man neben der Exzentrizität der Scheibe auch ihren Aufkeilfehler, d. h. einen kleinen Richtungsunterschied zwischen $\mathfrak{v}_1$ und der Scheibenachse. Für die Rechnung genügt die Annahme einer einzigen Zusatzmasse $\mu \ll m$ mit den Koordinaten

$$\xi = e_1 \cos\varphi\,, \qquad \eta = e_1 \sin\varphi\,, \qquad \zeta = e_2$$

im Hauptachsensystem; von den endlichen Größen e_1, e_2 verkörpert dabei die erste für sich allein eine statische und die zweite in Verbindung mit der ersten eine dynamische Unwucht. Im ortsfesten System besitzt die Zusatzmasse μ in erster Näherung die Koordinaten

$$x_1 + e_1 \cos\varphi\,, \qquad y_1 + e_1 \sin\varphi\,, \qquad z_1 + e_2\,,$$

und ihre Rückwirkung auf die Scheibe besteht — vom Gewicht abgesehen — in den Trägheitskräften

$$T_x = -\,\mu\,(\ddot{x}_1 - e_1 \sin\varphi\,\ddot{\varphi} - e_1 \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2)\,, \qquad T_y = -\,\mu\,(\ddot{y}_1 + e_1 \cos\varphi\,\ddot{\varphi} - e_1 \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2) \tag{3.9}$$

[1] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 49.

samt ihren, auf die Parallelen zu x, y, z durch S bezogenen Momenten

$$\left.\begin{aligned} W_{1x} &= \mu e_2 (\ddot{x}_1 - e_1 \sin\varphi\,\ddot{\varphi} - e_1 \cos\varphi\,\dot{\varphi}^2)\,, \\ W_{1y} &= -\mu e_2 (\ddot{y}_1 + e_1 \cos\varphi\,\ddot{\varphi} - e_1 \sin\varphi\,\dot{\varphi}^2)\,, \\ W_{1z} &= \mu e_1 (\ddot{x}_1 \sin\varphi - \ddot{y}_1 \cos\varphi - e_1\ddot{\varphi})\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

Ergänzt man die rechten Seiten von (2.6) durch die Terme (3.9), (3.10), und beschränkt man sich wieder auf die unbelastete Welle, so geht die fünfte Beziehung in

$$(C + \mu e_1^2)\,\ddot{\varphi} = \mu e_1 (\ddot{x}_1 \sin\varphi - \ddot{y}_1 \cos\varphi) - M_z \tag{3.11}$$

über. Bei gut ausgewuchteten Wellen dürfen die mit μ behafteten Glieder ohne Bedenken unterdrückt werden, so daß man im Falle stationären Betriebes wieder $\varphi = \omega t$ erhält. Damit gewinnt man in der gleichen Näherung aus den vier ersten Relationen (2.6) statt (3.6) das System

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \frac{\beta}{\Delta} x_1 - \frac{\gamma}{\Delta} v_{1x} &= \mu e_1 \omega^2 \cos\omega t\,, \\ m\ddot{y}_1 + \frac{\beta}{\Delta} y_1 - \frac{\gamma}{\Delta} v_{1y} &= \mu e_1 \omega^2 \sin\omega t\,, \\ -A\dot{v}_{1y} + C\omega\dot{v}_{1x} + \frac{\gamma}{\Delta} y_1 - \frac{\alpha}{\Delta} v_{1y} &= -\mu e_1 e_2 \omega^2 \cos\omega t\,, \\ A\dot{v}_{1x} + C\omega\dot{v}_{1y} - \frac{\gamma}{\Delta} x_1 + \frac{\alpha}{\Delta} v_{1x} &= \mu e_1 e_2 \omega^2 \sin\omega t\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

und dieses geht, wenn man die Lagekoordinaten der Scheibe mit

$$x_1 + i y_1 = r\,, \qquad v_{1x} + i v_{1y} = v \tag{3.13}$$

komplex zusammenfaßt, in

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r} + \frac{\beta}{\Delta} r - \frac{\gamma}{\Delta} v &= \mu e_1 \omega^2 \exp(i\omega t)\,, \\ A\dot{v} - iC\omega\dot{v} - \frac{\gamma}{\Delta} r + \frac{\alpha}{\Delta} v &= -i\mu e_1 e_2 \omega^2 \exp(i\omega t) \end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

über.

Da die linken Seiten in (3.6) und (3.12) übereinstimmen, ist die allgemeinste Lösung des reduzierten Systems (3.14) beschränkt. Ein partikuläres Integral des inhomogenen Systems kann in der Form

$$r = a \exp(i\omega t)\,, \qquad v = b \exp(i\omega t)$$

angesetzt werden, und die Integrationskonstanten a, b bestimmen sich aus (3.14) mit der Abkürzung

$$f(\omega^2) = \left(\frac{\beta}{\Delta} - m\omega^2\right)\left[\frac{\alpha}{\Delta} + (C - A)\,\omega^2\right] - \frac{\gamma^2}{\Delta^2} \tag{3.15}$$

zu

$$a = \frac{\mu e_1 \omega^2}{f(\omega^2)}\left[\frac{\alpha}{\Delta} + (C - A)\,\omega^2 - i e_2 \frac{\gamma}{\Delta}\right],$$

$$b = \frac{\mu e_1 \omega^2}{f(\omega^2)}\left[\frac{\gamma}{\Delta} - i e_2 \left(\frac{\beta}{\Delta} - m\omega^2\right)\right].$$

Das Integral ist nur für $f \neq 0$ brauchbar, dann aber auch beschränkt. Für $f \to 0$ wachsen indessen a und b im allgemeinen über alle Grenzen, so daß die kritischen Winkelgeschwindigkeiten durch $f = 0$ gegeben sind. Dafür kann man nach (3.15) und (3.3) auch

$$g(\omega^2) = \frac{1}{\omega^4} - [\alpha m - \beta (C - A)]\frac{1}{\omega^2} - \Delta m (C - A) = 0 \tag{3.16}$$

schreiben und erhält, wenn man die Kreiselwirkung zunächst vernachlässigt, also $C = A = 0$ setzt, die bekannte Beziehung

$$\omega_0^2 = \frac{1}{m\alpha} \tag{3.17}$$

für die kritischen Winkelgeschwindigkeiten ω_0 und $-\omega_0$.

Da nicht nur (3.16), sondern auch die in den folgenden Abschnitten herzuleitenden Bestimmungsgleichungen für die kritischen Winkelgeschwindigkeiten in ω quadratisch sind, wollen wir uns grundsätzlich auf positive Winkelgeschwindigkeiten beschränken.

4. Der Einfluß der Kreiselwirkung. Davon abgesehen, daß die Gleichung (3.16) beide Trägheitsmomente enthält und noch nicht mit $C = 2A$ für dünne Scheiben spezialisiert ist, stellt sie die *Grammel*sche Beziehung[1] für die kritischen Winkelgeschwindigkeiten ω_1 des Gleichlaufs dar. Sie führt auf

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{2}\,[\alpha\, m - \beta\,(C-A)] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,[\alpha\, m - \beta\,(C-A)]^2 + \Delta\, m\,(C-A)} \tag{4.1}$$

und liefert für abgeplattete Rotoren ($C > A$), da hier das negative Wurzelvorzeichen ein imaginäres ω_k ergeben würde, nur eine kritische Winkelgeschwindigkeit ω_k, die stets größer ist als ω_0.

Setzt man, durch die *Grammel*sche Darstellung geleitet,

$$C - A = m\,k^2\,, \tag{4.2}$$

so erhält man aus (4.1) und (3.17) nach kurzer Zwischenrechnung für das Verhältnis der kritischen Winkelgeschwindigkeiten mit und ohne Kreiselwirkung

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - p\,(k^2)}}\,, \tag{4.3}$$

wobei

$$p\,(k^2) = \frac{1}{2}\,(1 + \frac{\beta}{\alpha}\,k^2) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\,k^2\right)^2 - \frac{\gamma^2}{\alpha^2}\,k^2} \tag{4.4}$$

und für $C > A$ allein das obere Wurzelzeichen gültig ist.

Abb. 5 zeigt den Anstieg von (4.3) mit zunehmendem k^2, wobei der Auswertung von (4.4) speziell eine fliegende Welle mit Endscheibe zugrunde gelegt und der „Trägheitsradius" k auf die Länge l der Welle bezogen ist. Von der *Grammel*schen Abb. 13 unterscheidet sich Abb. 5 grundsätzlich nur dadurch, daß statt k als Abszisse k^2/l^2 verwendet ist; im übrigen gibt sie, da (4.2) noch beide Trägheitsmomente enthält, das Verhältnis ω_k/ω_0 für beliebige Abplattungen.

In der Praxis kommen auch Rotoren vor, die als verlängerte Kreisel ($C < A$) zu gelten haben, und für diese müssen beide Wurzelvorzeichen zugelassen werden. Da der Radikand in (4.1), der mit (3.3) auf die Gestalt

$$\frac{1}{4}\,[\alpha\, m + \beta\,(C-A)]^2 - \gamma^2\, m\,(C-A)$$

gebracht werden kann, für $C < A$ positiv, nach (4.1) aber kleiner als $[\alpha\, m - \beta\,(C-A)]^2/4$ ist, gibt es, wie bereits *O. Föppl*[1] gezeigt hat, bei verlängerten Rotoren zwei kritische Winkelgeschwindigkeiten des Gleichlaufs. Sie lassen sich auch wieder mit Hilfe von (4.3) und (4.4) ermitteln, wobei jetzt aber beide Wurzelvorzeichen zu berücksichtigen sind. Da (4.4) für $k^2 < 0$ eine positive und eine negative Wurzel besitzt, ist die eine der beiden kritischen Winkelgeschwindigkeiten ω_k kleiner, die andere größer als ω_0.

In Abb. 5 ist (4.3) auch für negative k^2 ausgewertet; sie liefert also die kritischen Winkelgeschwindigkeiten des Gleichlaufs auch für verlängerte Rotoren. Man überzeugt sich an Hand von (4.3) und (4.4) leicht davon, daß $\omega_k = 0$ eine Asymptote der tiefer liegenden Kurve, $k = 0$ eine solche der höher liegenden ist, und daß beide Kurven die gemeinsame Asymptote $\omega_k/\omega_0 = (\alpha\,\beta/\Delta)^{1/2}$ besitzen, die für die fliegende Welle speziell in $\omega_k/\omega_0 = 2$ übergeht.

Die kritischen Winkelgeschwindigkeiten des Gegenlaufs, die der Beziehung

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{2}\,[\alpha\, m + \beta\,(C+A)] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\,[\alpha\, m + \beta\,(C+A)]^2 - \Delta\, m\,(C+A)} \tag{4.5}$$

genügen, werden vom System (3.12) nicht geliefert, und daraus folgt, daß sie sich weder mit statischen noch mit dynamischen Unwuchten erklären lassen.

---

[1] *R. Grammel*, Der Kreisel, S. 16.
[2] *O. Föppl*, Schweiz. Bau-Ztg. 65 (1947), S. 259.

Gleich- und Gegenlauf werden üblicherweise als Gleichgewichtsformen des aus der Welle und der ideal ausgewuchteten Scheibe bestehenden Systems für einen mit der Winkelgeschwindigkeit ω bzw. $-\omega$ rotierenden Beobachter definiert. Als solche stellen sie Lösungen des reduzierten Systems (3.14) von der Form $r = a \exp(i\omega t)$, $v = b \exp(i\omega t)$ bzw. $r = a \exp(-i\omega t)$, $v = b \exp(-i\omega t)$ dar und haben somit für den ruhenden Beobachter als spezielle Eigenschwingungen zu gelten. Mit der ersten ist die von einer Unwucht herrührende, mit $\exp(i\omega t)$ proportionale Störung in Resonanz, mit der zweiten dagegen nicht. Schon *A. Stodola*, der erstmals den Gegenlauf theoretisch und experimentell untersuchte [1], hat aber auf die Möglichkeit der Anregung durch periodische Kräfte hingewiesen, die nicht von Unwuchten, sondern vom Mitschwingen des Trägers herrühren.

Nimmt man, um sich auf den einfachsten Fall zu beschränken, an, daß die Welle in oder mit ihren Lagern eine zusätzliche, zu ihrer Achse normale Translationsschwingung mit der Kreisfrequenz ω ausführe, so wird ihre Bewegung relativ zum mitschwingenden System durch die Differentialgleichungen (3.12) beschrieben, in denen die Störungsglieder der Reihe nach durch

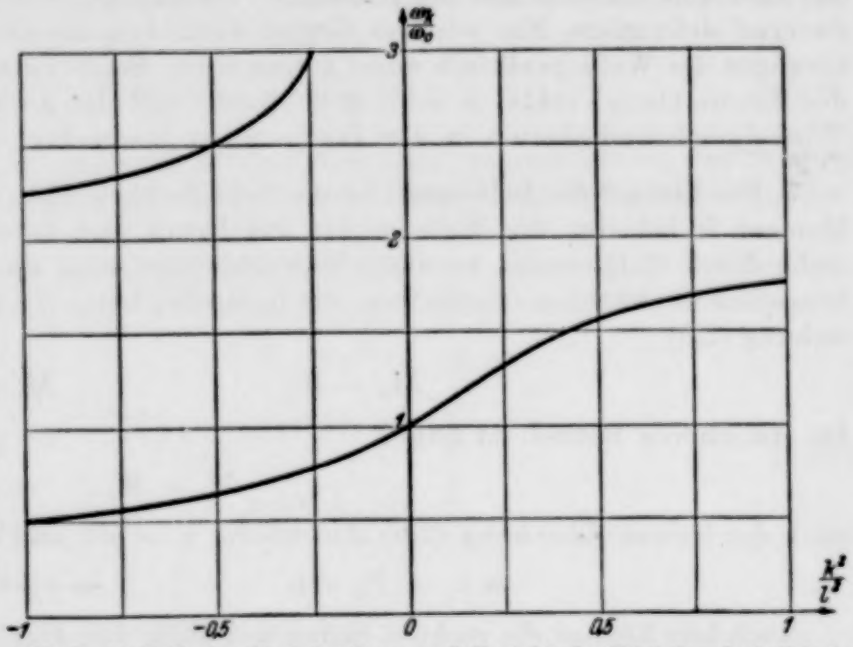


Abb. 5. Einfluß der Kreiselwirkung auf die kritische Winkelgeschwindigkeit; [$k^2 = (C-A)/m$ im Gleichlauf; $k^2 = -(C+A)/m$ im Gegenlauf].

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_{xn} \cos n\omega t + B_{xn} \sin n\omega t), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (A_{yn} \cos n\omega t + B_{yn} \sin n\omega t)$$

sowie zwei Nullen zu ersetzen sind. Der Übergang zur komplexen Schreibweise (3.13) ergibt statt (3.14)

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r} + \frac{\beta}{A} r - \frac{\gamma}{A} v &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \exp(n i \omega t), \\ A\ddot{v} - i C \omega \dot{v} - \frac{\gamma}{A} r + \frac{\alpha}{A} v &= 0, \end{aligned}\right| \tag{4.6}$$

wobei die C_n komplexe Konstanten sind. Mit dem Ansatz

$$r = a \exp(n i \omega t), \qquad v = b \exp(n i \omega t)$$

kommt jetzt statt (3.15)

$$f_n(\omega^2) = \left(\frac{\beta}{A} - n^2 m \omega^2\right)\left[\frac{\alpha}{A} + n(C - nA)\omega^2\right] - \frac{\gamma^2}{A^2}, \qquad (n = \cdots -1, 0, +1, \ldots) \tag{4.7}$$

und wenn man sich in der Entwicklung der Störung mit $n = \pm 1$ zunächst auf die Berücksichtigung der Grundschwingung beschränkt, erhält man neben (4.1) die Bedingung (4.5). Diese unterscheidet sich von (4.1) nur im Vorzeichen von C und liefert die beiden kritischen Winkelgeschwindigkeiten des Gegenlaufs, die wieder aus (4.3) und (4.4) und damit auch aus Abb. 5 erhalten werden, wenn man statt (4.2) jetzt

$$-(C + A) = m k^2 \tag{4.8}$$

setzt. Mit $n = \pm 2, \ldots$ gewinnt man sodann aus (4.7) unendlich viele weitere kritische Winkelgeschwindigkeiten, die den höheren Harmonischen der Störung entsprechen und damit auch ohne Kreiselwirkung vorhanden sind.

Das statische Verfahren, das als einzige und (bei Vernachlässigung der Dämpfung) gleichwertige kritische Zustände Gleich- und Gegenlauf liefert, gibt demnach die wirklichen Verhältnisse verzerrt wieder. Tatsächlich ist ohne äußere Erschütterungen nur der Gleichlauf kritisch, und zwar zufolge Resonanzgefahr mit den von (statischen oder dynamischen) Unwuchten

[1] *A. Stodola*, Z. ges. Turbinenwes. 15 (1918), S. 253.

herrührenden Trägheitskräften. Sind äußere Erschütterungen vorhanden, so besteht auch Resonanzgefahr mit diesen, und damit werden neben dem Gleichlauf (und zwar auch ohne Kreiselwirkung) unendlich viele weitere Drehzustände kritisch, unter denen (mit Rücksicht darauf, daß die Entwicklung der Störung praktisch rasch konvergiert) der Gegenlauf am stärksten in Erscheinung tritt.

Daß der Gegenlauf tatsächlich nicht nur ungefährlich, sondern sogar nur selten nachzuweisen ist, wird üblicherweise mit der inneren Dämpfung der Welle erklärt, die sich bei diesem Zustand dauernd deformiert. Ein weiterer Grund dafür besteht aber zweifellos darin, daß die Erschütterungen der Welle praktisch meist gering sind. Beide Tatsachen (samt der raschen Konvergenz der Entwicklung) erklären schließlich auch, daß die zu $n = \pm 2, \ldots$ gehörenden kritischen Winkelgeschwindigkeiten in der Praxis nicht beobachtet werden.

5. Der Einfluß der Belastung. Ist die Scheibe nach Abb. 4 durch eine axiale Kraft D sowie ein Moment $\mathfrak{W}$ belastet, die Welle mithin auf Druck und Torsion beansprucht, so kann (2.6) nicht mehr durch (3.1) ersetzt werden. Vernachlässigt man, um den Einfluß von D und $\mathfrak{W}$ auf die kritischen Drehzahlen zu erhalten, die Kreiselwirkung, so folgt aus der dritten und vierten Beziehung (2.6)

$$M_x = W_x\,, \qquad M_y = W_y\,. \tag{5.1}$$

Im stationären Betrieb ist ferner

$$M_z = W_z\,, \tag{5.2}$$

nach der letzten Gleichung (2.6) also wieder $\varphi = \omega t$, und damit reduziert sich das System auf

$$m\,\ddot{x}_1 + P_x = 0\,, \qquad m\,\ddot{y}_1 + P_y = 0\,. \tag{5.3}$$

Auch hier können die rechten Seiten mit Hilfe von Einflußzahlen durch die Lagekoordinaten der Scheibe ausgedrückt werden. Man führt zu diesem Zweck mit $\alpha_{ik}\,(i, k = x, y)$ die in der i-Richtung gemessene Durchbiegung an der Stelle z_1 unter dem Einfluß einer hier in der k-Richtung wirkenden Einheitskraft, der Druckkraft D und des Momentes $\mathfrak{W}$ ein, wobei damit zu rechnen ist, daß unter der durch $\mathfrak{W}$ gegebenen Belastung $\alpha_{xy} \neq 0$, $\alpha_{yx} \neq 0$ und $\alpha_{yy} \neq \alpha_{xx}$ ist. Mit diesen Einflußzahlen gilt

$$x_1 = \alpha_{xx}\,P_x + \alpha_{xy}\,P_y\,, \qquad y_1 = \alpha_{yx}\,P_x + \alpha_{yy}\,P_y\,, \tag{5.4}$$

und wenn man noch die Determinante

$$\Delta = \alpha_{xx}\alpha_{yy} - \alpha_{xy}\alpha_{yx} \tag{5.5}$$

einführt, die[1] wie (3.3) stets positiv ist, erhält man hieraus durch Umkehrung

$$P_x = \frac{1}{\Delta}\,(\alpha_{yy}\,x_1 - \alpha_{xy}\,y_1)\,, \qquad P_y = \frac{1}{\Delta}\,(-\alpha_{yx}\,x_1 + \alpha_{xx}\,y_1)\,. \tag{5.6}$$

Durch Einsetzen von (5.6) in (5.3) gewinnt man die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \frac{\alpha_{yy}}{\Delta}\,x_1 - \frac{\alpha_{xy}}{\Delta}\,y_1 = 0\,, \\ m\ddot{y}_1 - \frac{\alpha_{yx}}{\Delta}\,x_1 + \frac{\alpha_{xx}}{\Delta}\,y_1 = 0\,, \end{aligned}\right| \tag{5.7}$$

die als Ausdruck des Impulssatzes für das aus Scheibe und Welle bestehende System aufgefaßt werden können.

Die Einflußzahlen hängen von der Lagerung der Welle, bei kurzen Lagern, die eine Schiefstellung der elastischen Linie zulassen, aber auch davon ab, welcher Art die hier angreifenden Momente sind. Wirkt an einem kurzen Lager beispielsweise ein — durch ein Kreuzgelenk realisiertes — quasitangentiales Moment, so sind infolge der Drehung des Gelenkes die α_{ik} sogar periodische Funktionen der Zeit. Um in dieser ersten Untersuchung zeitabhängige Einflußzahlen auszuschließen und zugleich die Fallunterscheidungen auf ein erträgliches Maß zu rereduzieren, beschränken wir uns im folgenden auf lange Lager, die für die elastische Linie als Einspannungen gelten können. Unter dieser Voraussetzung sind nicht nur die α_{ik} konstant, sondern sämtliche an der Welle angreifenden Kräfte bei quasi- wie semitangentialer Belastung

[1] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 89.

der Scheibe konservativ. Es muß also

$$\frac{\partial P_y}{\partial x_1} = \frac{\partial P_x}{\partial y_1}$$

sein, und daraus folgt nach (5.6)

$$\alpha_{yx} = \alpha_{xy}\,, \tag{5.8}$$

d. h. die Richtigkeit des *Maxwell*schen Satzes auch in diesem Falle. Da ferner die potentielle Energie

$$V = \frac{1}{2\,\Delta}\left(\alpha_{yy}\,x_1^2 - 2\,\alpha_{xy}\,x_1 y_1 + \alpha_{xx}\,y_1^2\right) \tag{5.9}$$

des ganzen Systems für Belastungen, die unter der kritischen bleiben, positiv definit, das System also stabil ist, bleibt die allgemeinste Lösung von (5.7), wie man übrigens leicht durch Integration bestätigt, beschränkt.

Läßt man jetzt wieder Unwuchten zu, wobei man sich bei Vernachlässigung der Kreiselwirkung konsequenterweise auf statische zu beschränken hat, so kommt statt (5.7) das inhomogene System

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + \frac{\alpha_{yy}}{\Delta}\,x_1 - \frac{\alpha_{xy}}{\Delta}\,y_1 &= \mu e\omega^2 \cos\omega t, \\ m\ddot{y}_1 - \frac{\alpha_{yx}}{\Delta}\,x_1 + \frac{\alpha_{xx}}{\Delta}\,y_1 &= \mu e\omega^2 \sin\omega t. \end{aligned}\right| \tag{5.10}$$

Dieses besitzt ein partikuläres Integral

$$x_1 = a_x \cos\omega t + b_x \sin\omega t,$$
$$y_1 = a_y \cos\omega t + b_y \sin\omega t,$$

wobei

$$a_x = \frac{\mu e\omega^2}{f(\omega^2)}\left(\frac{\alpha_{xx}}{\Delta} - m\omega^2\right), \qquad b_y = \frac{\mu e\omega^2}{f(\omega^2)}\left(\frac{\alpha_{yy}}{\Delta} - m\omega^2\right),$$

$$b_x = a_y = \frac{\mu e\omega^2}{f(\omega^2)}\,\frac{\alpha_{xy}}{\Delta}$$

und

$$f(\omega^2) = \left(\frac{\alpha_{xx}}{\Delta} - m\omega^2\right)\left(\frac{\alpha_{yy}}{\Delta} - m\omega^2\right) - \frac{\alpha_{xy}^2}{\Delta^2} \tag{5.11}$$

ist. Man zieht hieraus wie schon in Abschnitt 3 den Schluß, daß die kritischen Winkelgeschwindigkeiten durch $f=0$ gegeben sind.

Da das reduzierte System (5.7) im allgemeinen keine Lösung der Form $x_1 = a\cos\omega t$, $y_1 = a\sin\omega t$ besitzt, kann die Gleichung $f=0$ hier nicht mehr als Bedingung für die Existenz einer nichttrivialen Gleichgewichtslage im mitrotierenden Koordinatensystem gedeutet werden. Damit ist beiläufig festgestellt, daß das *Grammel*sche Äquivalenzprinzip[1] hier ebensowenig gilt wie etwa bei der unbelasteten Welle mit zwei verschiedenen Biegesteifigkeiten[2].

Ist das Moment $\mathfrak{W}$ semitangential, so kann es, wie ein Blick auf (1.2) zeigt, vektoriell angeschrieben werden. Da dann keine Achse vor der anderen ausgezeichnet ist, unterscheiden sich die Verschiebungsvektoren $(\alpha_{xx}, \alpha_{yx})$ und $(\alpha_{xy}, \alpha_{yy})$, die von Einheitskräften in der x- bzw. y-Richtung erzeugt werden, nur durch eine Drehung um $\pi/2$. Hieraus folgt aber $\alpha_{yy} = \alpha_{xx}$ sowie $\alpha_{yx} = -\alpha_{xy}$ und mit Rücksicht auf (5.8)

$$\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \bar{\alpha}\,, \qquad \alpha_{yx} = \alpha_{xy} = 0, \qquad \Delta = \bar{\alpha}^2. \tag{5.12}$$

Der Punkt S auf der elastischen Linie (Abb. 4) verschiebt sich demnach unter einer beliebig gerichteten horizontalen Einheitskraft in deren Richtung, und zwar um die Strecke $\bar{\alpha}$, die jetzt freilich nicht mehr mit der Einflußzahl α der unbelasteten Welle übereinstimmt, sondern mit Rücksicht auf die Belastung durch D und $\mathfrak{W}$ größer ist.

---

[1] Vgl. *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, S. 782.
[2] Ebenda, S. 784.

Mit (5.11) und (5.12) geht die Bedingung $f=0$ in

$$\omega_k^2 = \frac{1}{m\bar{\alpha}} \tag{5.13}$$

über.

Die lang gelagerte, mit einer einzigen Scheibe besetzte Welle besitzt also ohne Kreiselwirkung bei semitangentialer Belastung eine einzige kritische Winkelgeschwindigkeit ω_k. Diese ist kleiner als ω_0 und wird mit (5.13) erhalten, wobei die Einflußzahl unter Berücksichtigung der Belastung D, $\mathfrak{W}$ zu ermitteln ist.

Im Falle eines quasitangentialen Momentes (1.1) ist das Problem nicht mehr rotationssymmetrisch. Die Beziehungen (5.12) gelten dann im allgemeinen nicht, und die Bedingung $f=0$ geht mit (5.11) in die Gleichung

$$g(\omega^2) = \frac{1}{\omega^4} - m\,(\alpha_{xx}+\alpha_{yy})\,\frac{1}{\omega^2} + m^2\Delta = 0 \tag{5.14}$$

über. Diese hat denselben Aufbau wie (3.16) beim verlängerten Rotor, und die für diesen durchgeführten Überlegungen zeigen, daß die beiden Wurzeln

$$\frac{1}{\omega_k^2} = \frac{1}{2}\,m\left[\alpha_{xx}+\alpha_{yy} \pm \sqrt{(\alpha_{xx}+\alpha_{yy})^2 - 4\Delta}\right] \tag{5.15}$$

positiv sind.

Die lang gelagerte, mit einer einzigen Scheibe besetzte Welle besitzt mithin ohne Kreiselwirkung bei quasitangentialer Belastung zwei kritische Winkelgeschwindigkeiten, die mit (5.15) erhalten werden. Sie können freilich — mindestens in erster Näherung — zusammenfallen.

6. Semitangentiale Belastung. Im semitangentialen Fall (mehrfach bis gleichmäßig beaufschlagte Scheibe) ist die kritische Winkelgeschwindigkeit durch (5.13) gegeben und ihre Bestimmung damit auf die Ermittlung der Einflußzahl $\bar{\alpha}$ unter der Belastung D, $\mathfrak{W}$ zurückgeführt.

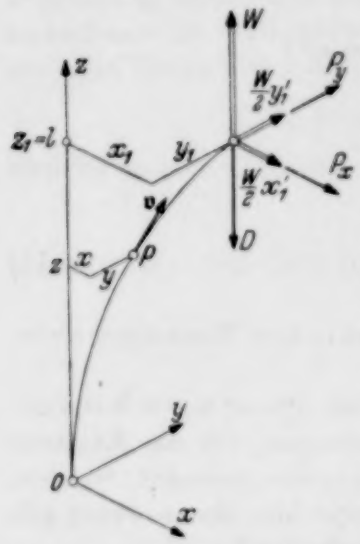


Abb. 6. Fliegende Welle unter einer Druckkraft und einem semitangentialen Moment (Beaufschlagung in mehr als zwei Punkten).

Als Beispiel greifen wir die fliegende Welle (Abb. 1) heraus, die in Abb. 6 samt ihrer Belastung durch die Axialkraft D, das semitangentiale Moment (1.2) sowie eine horizontale Kraft $\mathfrak{P}$ mit den Komponenten P_x, P_y wiedergegeben ist. Die Differentialgleichungen ihrer elastischen Linie lauten

$$EIx'' = M_\eta, \qquad EIy'' = -M_\xi, \tag{6.1}$$

wenn mit EI die Biegesteifigkeit und mit M_ξ, M_η die Komponenten des Biegemomentes bezüglich der Hauptachsen (Abb. 3) des Schnittes P bezeichnet werden. Liest man diese Komponenten in Abb. 6 ab, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} EIx'' &= -Wy' + \frac{1}{2}Wy_1' + D(x_1 - x) + P_x(l-z), \\ EIy'' &= \;\;Wx' - \frac{1}{2}Wx_1' + D(y_1 - y) + P_y(l-z), \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

oder, nach z abgeleitet,

$$\left.\begin{aligned} EIx''' + Wy'' + Dx' + P_x &= 0, \\ EIy''' - Wx'' + Dy' + P_y &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

Führt man mit $\mathfrak{v}$ ($v_x=x'$, $v_y=y'$, $v_z=1$) wieder den tangentialen Einheitsvektor sowie die Abkürzungen

$$\frac{W}{EI} = w, \qquad \frac{D}{EI} = b, \qquad \frac{P_x}{EI} = p_x, \qquad \frac{P_y}{EI} = p_y \tag{6.4}$$

ein, so gewinnt man durch komplexe Zusammenfassung

$$v_x + i\,v_y = v, \qquad p_x + i\,p_y = p \tag{6.5}$$

an Stelle von (6.3) eine einzige Differentialgleichung

$$v'' - i\,w\,v' + bv + p = 0, \tag{6.6}$$

deren allgemeinste Lösung unter der Voraussetzung, daß $b \neq 0$ ist, mit

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(w \pm \sigma), \qquad \sigma = \sqrt{w^2 + 4b} \tag{6.7}$$

und den Integrationskonstanten A, B durch

$$v = A \exp(i\lambda_1 z) + B \exp(i\lambda_2 z) - \frac{p}{b} \tag{6.8}$$

gegeben ist.

Die Randbedingungen lauten

$$v_0 = 0, \qquad v_1' - \frac{1}{2} i w v_1 = 0. \tag{6.9}$$

Die erste davon drückt aus, daß die elastische Linie am unteren Ende vertikal ist; die zweite folgt aus der Forderung, daß neben (6.3) — insbesondere am oberen Ende — auch die Differentialgleichungen (6.2) erfüllt sein müssen. Die Bestimmung der Integrationskonstanten mit (6.9) führt (6.8) in

$$v = \frac{p}{b}\left[\frac{\exp(i\lambda_2 l) - w/\sigma}{\exp(i\lambda_1 l) + \exp(i\lambda_2 l)} \exp(i\lambda_1 z) + \frac{\exp(i\lambda_1 l) + w/\sigma}{\exp(i\lambda_1 l) + \exp(i\lambda_2 l)} \exp(i\lambda_2 z) - 1\right] \tag{6.10}$$

über. Die Verschiebung des oberen Endes wird hieraus mit

$$r_1 = x_1 + i y_1 = \int_0^l v\,dz \tag{6.11}$$

erhalten und hat, wie man nach einigen Zwischenrechnungen feststellt, die Form

$$r_1 = \frac{p}{b}\left(\frac{w^2 + \sigma^2}{2\sigma b} \operatorname{tg}\frac{\sigma l}{2} - \frac{w}{b}\frac{\sin\frac{wl}{2}}{\cos\frac{\sigma l}{2}} - l\right). \tag{6.12}$$

Da in dieser Gleichung nur r_1 und p komplex sind, hat die Verschiebung erwartungsgemäß die Richtung der Kraft $\mathfrak{P}$, und die gesuchte Einflußzahl ist, wie ein Blick auf die beiden letzten Beziehungen (6.4) zeigt,

$$\bar{\alpha} = \frac{1}{bEI}\left(\frac{w^2 + \sigma^2}{2\sigma b} \operatorname{tg}\frac{\sigma l}{2} - \frac{w}{b}\frac{\sin\frac{wl}{2}}{\cos\frac{\sigma l}{2}} - l\right). \tag{6.13}$$

Unter der Annahme, daß die Druckkraft D im Vergleich zur Knickkraft klein sei, und daß entsprechendes auch für das Moment W gelte, kann $\bar{\alpha}$ in eine nach Potenzen von b und w^2 fortschreitende Reihe

$$\bar{\alpha} = \frac{l^3}{3EI}\left(1 + \frac{2}{5} b l^2 + \frac{7}{80} w^2 l^2 \ldots\right) \tag{6.14}$$

entwickelt werden, und dafür kann man unter Berücksichtigung von (6.4) sowie der Tatsache, daß der Faktor vor der Klammer die Einflußzahl α der unbelasteten Welle darstellt, auch

$$\frac{\bar{\alpha}}{\alpha} = 1 + \frac{2}{5}\frac{Dl^2}{EI} + \frac{7}{80}\left(\frac{Wl}{EI}\right)^2 \ldots \tag{6.15}$$

schreiben. Man hat also nach (3.17) und (5.13) für das Verhältnis der kritischen Winkelgeschwindigkeiten mit und ohne Belastung in erster Näherung

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} = 1 - k_1 \frac{Dl^2}{EI} - k_3\left(\frac{Wl}{EI}\right)^2, \tag{6.16}$$

wobei

$$k_1 = \frac{1}{5}, \qquad k_3 = \frac{7}{160} \tag{6.17}$$

ist.

Die Korrekturfaktoren k_1 und k_3, die den Einfluß der Druckkraft D und des semitangentialen Momentes W auf das Verhältnis ω_k/ω_0 angeben, können für andere Fälle mit langen Lagern analog bestimmt werden und sind in Tabelle 1 für die drei häufigsten Fälle zusammengestellt[1].

7. Quasitangentiale Belastung. Bei quasitangentialer Belastung (doppelt beaufschlagte Scheibe) sind die kritischen Winkelgeschwindigkeiten durch (5.15) gegeben und ihre Bestimmung damit auf die Ermittlung der Einflußzahlen α_{xx}, α_{yy}, α_{xy} zurückgeführt. Für kleine Werte von D und W kann man sich auch hier auf eine erste Näherung beschränken, d. h. auf eine abgebrochene Reihenentwicklung analog (6.16) ausgehen. Da diese für k_1 den bereits bekannten Wert liefern muß, darf man die Druckkraft von Anfang an weglassen.

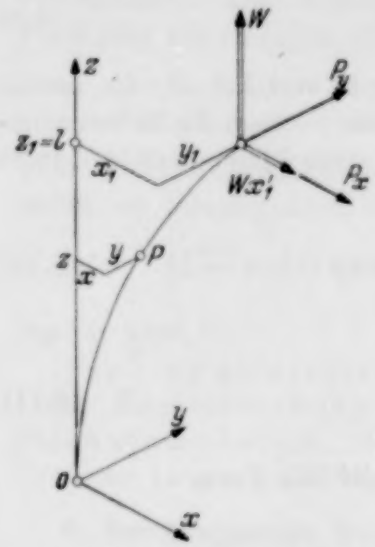


Abb. 7. Fliegende Welle unter einem quasitangentialen Moment (Beaufschlagung in zwei Punkten).

Im Falle der fliegenden, gemäß Abb. 7 belasteten Welle gelten nach (6.1) für die elastische Linie die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} EIx'' &= -Wy' + P_x(l-z), \\ EIy'' &= Wx' - Wx_1' + P_y(l-z). \end{aligned}\right\} \tag{7.1}$$

Durch Ableiten nach z erhält man hieraus wieder die Beziehungen (6.3), jetzt freilich mit $D=0$, und mit den Abkürzungen (6.4), (6.5) folgt die komplexe Differentialgleichung

$$v'' - iwv' + p = 0 \tag{7.2}$$

mit der allgemeinsten Lösung

$$v = A\exp(iwz) + B - i\frac{p}{w}z. \tag{7.3}$$

Die erste Randbedingung (6.9) gilt auch hier und liefert

$$v = A[\exp(iwz) - 1] - i\frac{p}{w}z; \tag{7.4}$$

die zweite ist jetzt durch die beiden Forderungen

$$v_{x1}' + w\,v_{y1} = 0, \qquad v_{y1}' = 0 \tag{7.5}$$

zu ersetzen, und diese machen die Rückkehr zur reellen Schreibweise nötig. Setzt man zu diesem Zweck $A = A_x + iA_y$, so zerfällt (7.4) in

$$\left.\begin{aligned} v_x &= A_x(\cos wz - 1) - A_y\sin wz + \frac{p_y}{w}z, \\ v_y &= A_x\sin wz + A_y(\cos wz - 1) - \frac{p_x}{w}z, \end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

und die Integrationskonstanten A_x, A_y bestimmen sich aus (7.5) zu

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{1}{w\cos wl}\left[\left(\frac{p_y}{w} - lp_x\right)\sin wl + \frac{p_x}{w}\right], \\ A_y &= \frac{p_y}{w^2} - \frac{lp_x}{w}. \end{aligned}\right\} \tag{7.7}$$

Die Verschiebung des oberen Endes ist durch

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \int_0^l v_x\,dz = A_x\left(\frac{\sin wl}{w} - l\right) + A_y\frac{\cos wl - 1}{w} + \frac{p_y l^2}{2w}, \\ y_1 &= \int_0^l v_y\,dz = -A_x\frac{\cos wl - 1}{w} + A_y\left(\frac{\sin wl}{w} - l\right) - \frac{p_x l^2}{2w} \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

gegeben. Führt man die Integrationskonstanten (7.7) ein und setzt man gleichzeitig $p_x = 1/EI$, $p_y = 0$, so erhält man nach (6.4) die Verschiebungen unter einer Einheitskraft in der x-Richtung, d. h. die Einflußzahlen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{xx} &= \frac{1}{EI}\left[\left(\frac{1}{w^3} + \frac{l^2}{w}\right)\operatorname{tg} wl - \frac{l}{w^2}\left(\frac{2}{\cos wl} - 1\right)\right], \\ \alpha_{yx} &= \frac{1}{EI}\left[-\frac{l}{w^2}\operatorname{tg} wl + \frac{1}{w^3}\left(\frac{1}{\cos wl} - 1\right) + \frac{l^2}{2w}\right], \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

[1] Die Werte für die beidseitig gelagerte Welle verdanke ich Herrn *Chr. Wehrli*, dipl. Math. ETH.

und ganz entsprechend kommt mit $p_x = 0$, $p_y = 1/EI$ neben $\alpha_{xy} = \alpha_{yx}$

$$\alpha_{yy} = \frac{1}{EI}\left[\frac{1}{w^3}\operatorname{tg} w l - \frac{l}{w^2}\right] . \tag{7.10}$$

Die Entwicklung von (7.9) und (7.10) ergibt

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{xx} = \frac{l^3}{3EI}\left(1 + \frac{3}{20} w^2 l^2 \ldots\right) , \qquad \alpha_{yy} = \frac{l^3}{3EI}\left(1 + \frac{2}{5} w^2 l^2 \ldots\right) , \\ \alpha_{xy} = -\frac{w l^4}{8EI}\left(1 + \frac{7}{18} w^2 l^2 \ldots\right) . \end{aligned}\right\} \tag{7.11}$$

Schreibt man den Randikanden von (5.15) mit Hilfe von (5.5) in der Form $(\alpha_{xx} - \alpha_{yy})^2 + 4\,\alpha_{xy}^2$, so stellt man an Hand von (7.11) leicht fest, daß sich die Wurzel in der ersten Näherung, auf die wir uns nach dem Verzicht auf die Mitnahme von D notwendig beschränken müssen, auf $2\,|\alpha_{xy}|$ und der erste Klammerterm auf

$$2\alpha = \frac{2l^3}{3EI} \tag{7.12}$$

reduziert. Man hat also in dieser Näherung

$$\frac{1}{\omega_k^2} = m\,(\alpha \pm \alpha_{xy}) , \tag{7.13}$$

zufolge (3.17)

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} = 1 \mp \frac{\alpha_{xy}}{2\alpha} \tag{7.14}$$

und nach (7.11) sowie (7.12)

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} = 1 \pm \frac{3}{16} w l . \tag{7.15}$$

Nimmt man die Druckkraft schließlich wieder mit, so kommt gemäß (6.4) und (6.17) endgültig

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} = 1 - k_1 \frac{Dl^2}{EI} \pm k_2 \frac{Wl}{EI} , \tag{7.16}$$

wobei

$$k_1 = \frac{1}{5} , \qquad k_2 = \frac{3}{16} \tag{7.17}$$

ist.

In Tabelle 1 ist neben k_1 und k_3 auch der Korrekturfaktor k_2 für das quasitangentiale Moment eingetragen[1].

8. Schlußbemerkungen. Durch Zusammenfassung von (6.16) und (7.16) erhält man die bei langer Lagerung stets gültige Beziehung

$$\frac{\omega_k}{\omega_0} = 1 - k_1 \frac{Dl^2}{EI} \pm k_2 \frac{Wl}{EI} - k_3 \left(\frac{Wl}{EI}\right)^2 , \tag{8.1}$$

deren Beiwerte k_1, k_2, k_3 in Tabelle 1 für drei einfache Fälle zusammengestellt sind.

Im Fall II ist im Gegensatz zu I und III die Scheibe selbst unbelastet, und da die Lager lang vorausgesetzt sind, braucht bei den Endmomenten nicht mehr zwischen dem semi- und dem quasitangentialen Kraftangriff unterschieden zu werden. Es ist hier $k_g = 0$, und für k_1, k_3 werden erwartungsgemäß die von *R. Grammel*[2] angegebenen Werte erhalten.

Auch in den übrigen Fällen ist bei semitangentialer Belastung (Beaufschlagung der Scheibe in mehr als zwei Punkten) $k_2 = 0$; sowohl die Druckkraft D wie das Moment W haben (wie schon im Fall II) ein Absinken der kritischen Winkelgeschwindigkeit zur Folge.

Bei quasitangentialer Belastung (Beaufschlagung in zwei Punkten) verhält sich Fall III (in der beobachteten Näherung) genau so wie bei semitangentialer. Wie in Fall II, wird auch hier ω_k durch D und W gesenkt. Im Fall I dagegen ist $k_2 \neq 0$ (so daß der dritte Term in (8.1)

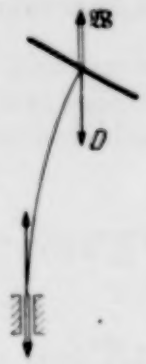
[1] Auch hier verdanke ich die Zahlenwerte für die beidseitig gelagerte Welle Herrn *Chr. Wehrli*, dipl. Math. ETH.

[2] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, a. a. O. S. 800.

unterdrückt werden muß). Hier wird ω_k durch D erniedrigt und durch W in zwei kritische Winkelgeschwindigkeiten aufgespalten, von denen die eine kleiner, die andere größer ist als diejenige unter Druck allein.

Aus (8.1) und den Zahlenwerten in Tabelle 1 geht hervor, daß das quasitangentiale Moment, sofern es sich überhaupt vom semitangentialen unterscheidet, die kritische Winkelgeschwindigkeit eher stärker modifiziert als dieses. Die Berücksichtigung von W drängt sich daher vor allem bei doppelter Beaufschlagung und hier in erster Linie bei der fliegenden Welle auf.

Tabelle 1. *Einfluß von Druck und Torsion auf die kritische Winkelgeschwindigkeit* [k_1, k_2, k_3 *Korrekturfaktoren in* (8.1)].

Fall	I	II	III
Lagerung / *Belastung*			
	$k_1=\frac{1}{5}$	$k_1=\frac{1}{80}$	$k_1=\frac{1}{160}$
	$k_2=0$ $k_3=\frac{7}{160}$	$k_2=0$	$k_2=0$ $k_3=\frac{13}{7680}$
	$k_2=\frac{3}{76}$	$k_3=\frac{3}{640}$	$k_2=0$ $k_3=\frac{13}{7680}$

Auch in den Fällen I und III stimmen die Werte von k_1 mit den *Grammel*schen überein; diejenigen von k_3 unterscheiden sich aber davon, und k_2 stellt eine Korrektur dar, welche den mit W^2 proportionalen Term völlig überschattet.

Bei kurzen Lagern sind (in den Fällen II und III) andere Ergebnisse zu erwarten. Hier ist es für die Bestimmung der Einflußzahlen wesentlich, welcher Art die am Ende der Welle angreifenden Momente sind. Vom praktischen Standpunkt dürfte vor allem das rotierende quasitangentiale Moment von Interesse sein, wie es in Kreuzgelenken auftritt. Wie schon in Abschnitt 5 bemerkt wurde, werden aber in diesem Falle die α_{ik} im raumfesten Koordinatensystem periodische Funktionen der Zeit, und die Integration des Systems (5.10), das damit quasilinear wird, stellt ein völlig neues Problem dar.

(Eingegangen am 20. Mai 1952.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *H. Ziegler*, Rüschlikon bei Zürich, Weiherweg 6.

Über die Anwendung der *Mellin*-Transformation zur Lösung einer Aufgabe der Plattenbiegung.

Von S. Woinowsky-Krieger.

1. Einleitung. Zu den noch wenig geklärten Fragen der Theorie der Plattenbiegung gehört die Frage nach der Spannungsverteilung in der Ecke einer dünnen Platte bei einem beliebigen Öffnungswinkel und bei beliebigen Grenzbedingungen längs der beiden anschließenden Plattenränder. Sind diese Ränder unendlich ausgedehnt, so läßt die Aufgabe auch eine strenge Lösung zu, die sich bequem mit Hilfe der *Mellin*schen Umkehrformel aufbauen läßt.

Als Anwendungsbeispiel wählen wir eine unendlich erstreckte keilförmige Kragplatte mit beliebigem Öffnungswinkel. Da es sich vor allem darum handelt, die Brauchbarkeit der gewählten Transformationsmethode zur Lösung von Plattenaufgaben der vorliegenden Art zu zeigen, so mögen im Folgenden nur einige spezielle Belastungsfälle behandelt werden. Es ergibt sich dann von selbst der Weg zu einer Verallgemeinerung der Lösung für eine beliebig verteilte Belastung.

2. Die durch eine Einzelkraft am Rande belastete Kragplatte. Die in Abb. 1 dargestellte, längs des Randes $\vartheta = 0$ eingespannte Platte trage an der Stelle $r = r_0$, $\vartheta = \alpha$ ihres freien Randes eine Punktlast P. Die elastische Fläche der Platte $w(r, \vartheta)$ genügt dann überall, außer in dem Punkte (r_0, α), der Differentialgleichung

$$\Delta \Delta w = 0 . \tag{1}$$

Wählt man ferner eine nichtnegative Zahl s als Parameter, so kann man die Lösung der Gleichung (1) in der Form

$$W(s) = r^{-s} \Theta(s) \tag{2}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \Theta(s) = A(s) \sin s\vartheta + B(s) \cos s\vartheta + C(s) \sin (s+2)\vartheta \\ + D(s) \cos (s+2)\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Abb. 1. Die Kragplatte im Koordinatensystem.

anschreiben, worin $A(s)$, $B(s)$, $C(s)$ und $D(s)$ gewisse von s abhängige Koeffizienten sein sollen. Der *Mellin*schen Umkehrformel[1] entsprechend sei jetzt die Biegefläche der Platte in der Form

$$w(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} r^{-s} \Theta(s)\, ds \tag{4}$$

ausgedrückt, wobei der Integrationsweg in gewissen Grenzen willkürlich bleibt und die Wahl der reellen Größe σ erst später erfolgen soll.

Nun sind zur Bestimmung der vier Beiwerte im Ausdruck (3) ebensoviele Randbedingungen erforderlich. Drei dieser Randbedingungen, die die Einspannung der Platte längs des einen Randes $\vartheta = 0$ festlegen und die tangentialen Biegemomente längs des anderen Randes $\vartheta = \alpha$ gleich null setzen, lassen sich sofort hinschreiben. Sofern ν die Querdehnungszahl des Plattenmaterials bezeichnet, erhält man

$$\left.\begin{aligned} \Big[W(s)\Big]_{\vartheta = 0} &= 0 , \\ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial W(s)}{\partial \vartheta}\right]_{\vartheta = 0} &= 0 , \\ \left[\nu \frac{\partial^2 W(s)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W(s)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W(s)}{\partial \vartheta^2}\right]_{\vartheta = \alpha} &= 0 . \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1] Siehe z. B. *R. Courant* und *D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik Bd. 1, S. 87, 2. Auflage. Berlin 1931.

Indem man die Relation (2) beachtet und dann die vorstehenden Gleichungen nach r ausdifferentiiert, lassen sie sich folgendermaßen umschreiben:

$$\left.\begin{aligned} &\left[\Theta(s)\right]_{\vartheta=0} = 0\,, \\ &\left[\frac{d\Theta(s)}{d\vartheta}\right]_{\vartheta=0} = 0\,, \\ &\left[\frac{d^2\Theta(s)}{d\vartheta^2} + [\nu s^2 - (1-\nu)s]\Theta(s)\right]_{\vartheta=\alpha} = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Zur Aufstellung der noch fehlenden vierten Randbedingung benötigen wir eine geeignete Darstellung für die an der Stelle $r=r_0$ der Geraden $\vartheta=\alpha$ angreifende Einzelkraft. Unter Benutzung der *Mellin*schen Umkehrformel läßt sich eine willkürliche Funktion $p(r)$ in folgender Weise darstellen

$$p(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i} r^{-s}\,ds \int_0^\infty \varrho^{s-1}\,p(\varrho)\,d\varrho\,. \tag{7}$$

Der gegebenen Lastverteilung entsprechend verschwinde die Funktion $p(r)$ überall außer in $r=r_0$ und genüge überdies der Bedingung

$$\int_0^\infty p(r)\,dr = P\,. \tag{8}$$

Die Integralformel (7) liefert für eine derart gewählte Funktion die Darstellung

$$p(r) = \frac{P}{2\pi i r_0}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-s} ds\,. \tag{9}$$

Der Größe σ kann man dabei einen beliebigen Wert geben, da ja das Integral

$$\int_0^\infty \varrho^{\sigma-1}\,p(\varrho)\,d\varrho = P r_0^{\sigma-1} \tag{10}$$

für $0 < r_0 < \infty$ absolut konvergiert.

Nun drücken sich die am Plattenrand $\vartheta=\alpha$ wirkenden, in der Richtung nach unten als positiv angenommenen Scherkräfte einschließlich der Zusatzkräfte aus den Torsionsmomenten durch das Integral

$$q_i = -\frac{D}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\left[\frac{2-\nu}{r}\,\frac{\partial^3 W(s)}{\partial r^2\partial\vartheta} + \frac{2\nu-1}{r^2}\,\frac{\partial^2 W(s)}{\partial r\,\partial\vartheta} + \frac{2(1-\nu)}{r^3}\,\frac{\partial W(s)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r^3}\,\frac{\partial^3 W(s)}{\partial\vartheta^3}\right] ds \tag{11}$$

aus, worin D die Biegesteifigkeit der Platte bezeichnet. Benutzt man wieder die Gleichung (2) zur Substitution, so ergibt sich

$$q_i = -\frac{D}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}\left[\frac{d^3\Theta(s)}{d\vartheta^3} + [s^2 + (1-\nu)(s+1)(s+2)]\,\frac{d\Theta(s)}{d\vartheta}\right]_{\vartheta=\alpha} r^{-(s+3)}\,ds\,. \tag{12}$$

Setzt man jetzt

$$q_i = \left(\frac{r_0}{r}\right)^3 p(r)\,, \tag{13}$$

so entspricht der Verlauf der Randscherkräfte immer noch der gegebenen Randbelastung $p(r)$, die ja überall, außer in $r=r_0$, Null ist. Nach Einführung der Ausdrücke (12) und (9) in die Relation (13) ergibt sich nun die Randbedingung

$$\left[\frac{d^3\Theta(s)}{d\vartheta^3} + [s^2 + (1-\nu)(s+1)(s+2)]\,\frac{d\Theta(s)}{d\vartheta}\right]_{\vartheta=\alpha} = -\frac{P r_0^{s+2}}{D}\,, \tag{14}$$

die im Zusammenhang mit dem System der Gleichungen (6) ausreicht, um die vier Koeffizienten $A(s)$ bis $D(s)$ der Funktion (3) zu bestimmen. Das Ergebnis dieser Rechnung lautet dann auf

Grund von (4)

$$w = \frac{P r r_0}{4 \pi i D} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} \frac{E \Theta_1 - F \Theta_2}{N_0 s (s+1)(s+2)} \left(\frac{r_0}{r}\right)^{s+1} ds \tag{15}$$

sofern zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \Theta_1 &= (s+2) \sin s\vartheta - s \sin (s+2)\vartheta , \\ \Theta_2 &= s \cos s\vartheta - s \cos (s+2)\vartheta , \\ E &= (1-\nu) s \cos s\alpha - [s(1-\nu)+4] \cos (s+2)\alpha , \\ F &= (1-\nu)(s+2) \sin s\alpha - [s(1-\nu)+4] s \sin (s+2)\alpha , \\ N_0 &= 4[1+\nu+(1-\nu)\cos(2s+2)\alpha] - \\ &\quad -(1-\nu)^2 [s(s+2) - (s+1)^2 \cos 2\alpha + \cos (2s+2)\alpha] \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

gesetzt wird. Führt man schließlich als neue Variable

$$u = -(s+1)i \tag{17}$$

ein und wählt den Integrationsweg $\sigma = -1$, so läßt sich der Ausdruck (15) nach einigen Vereinfachungen auf die reelle Form

$$w = \frac{2 P r r_0}{\pi D} \int_0^\infty \frac{G \cos\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right) + H \sin\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right)}{N u (1+u^2)} du \tag{18}$$

bringen, wobei

$$\left.\begin{aligned} G &= [2 \operatorname{Cof} \alpha u \cos\alpha + (1-\nu) u \operatorname{Sin} \alpha u \sin\alpha](\operatorname{Sin} u\vartheta \cos\vartheta - u \operatorname{Cof} u\vartheta \sin\vartheta) + \\ &\quad + [(1+\nu) u \operatorname{Sin} \alpha u \cos\alpha + (2 + u^2 - \nu u^2) \operatorname{Cof} \alpha u \sin\alpha] \operatorname{Sin} u\vartheta \sin\vartheta , \\ H &= (1+\nu)[(\operatorname{Sin} \alpha u \cos\alpha - u \operatorname{Cof} \alpha u \sin\alpha) \operatorname{Sin} u\vartheta \sin\vartheta - \\ &\quad - \operatorname{Sin} \alpha u \sin\alpha (\operatorname{Sin} u\vartheta \cos\vartheta - u \operatorname{Cof} u\vartheta \sin\vartheta)] , \\ N &= 4 + (1+\nu)^2 + (1-\nu)(3+\nu) \operatorname{Cof} 2\alpha u + (1-\nu)^2 u^2 (1 - \cos 2\alpha) \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

sein soll.

Man kann die Biegefläche (18) und ähnlich gebaute Lösungen für andere Randbedingungen sehr wohl auch unmittelbar, aus einem passend gewählten reellen Ansatz, gewinnen. Hat dabei die keilförmige Platte nur eingespannte oder gelenkig gelagerte Ränder, so verschwindet in der Lösung, wie sich nachweisen läßt [1], das Glied mit $\sin(u \ln r/r_0)$ und der direkte Ansatz gestaltet sich dann verhältnismäßig einfach. Bei anderen Randbedingungen sind die Sinus-Funktionen mitzuberücksichtigen, und die Anzahl der Freiwerte im reellen Ansatz vergrößert sich dermaßen, daß die Transformationsmethode dann entschieden den Vorzug verdient.

3. Durchbiegungen und Einspannmomente der Platte mit Einzellast. Wir wollen die Lösung (18) dazu benutzen, den Verlauf der Durchbiegungen w_α längs des Randes $\vartheta = \alpha$, sowie den Verlauf der tangentialen Biegemomente m_{t_0} längs des Randes $\vartheta = 0$ zu verfolgen. Nimmt man noch, wie vielfach üblich, $\nu = 0$ an, so lauten die betreffenden Ausdrücke

$$w_\alpha = \frac{2 P r r_0}{\pi D} \int_0^\infty \frac{(\operatorname{Sin} 2\alpha u - u \sin 2\alpha) \cos\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right)}{N u (1+u^2)} du , \tag{20}$$

$$m_{t_0} = -\frac{4 P r_0}{\pi r} \int_0^\infty \frac{I \cos\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right) + J \sin\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right)}{N (1+u^2)} du \tag{21}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} I &= u \operatorname{Sin} \alpha u \cos\alpha + (2+u^2) \operatorname{Cof} \alpha u \sin\alpha , \\ J &= \operatorname{Sin} \alpha u \cos\alpha - u \operatorname{Cof} \alpha u \sin\alpha , \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

während N sich aus (19) ergibt, indem man dort ν gleich Null setzt.

[1] S. *Woinowsky-Krieger*, The bending of a wedge-shaped plate, Journal of Applied Mechanics, paper No 52—A-6 (erscheint demnächst).

Die Integrale (20) und (21) wurden für die Öffnungswinkel $\alpha=\pi/4$ und $\alpha=\pi/2$ ausgewertet. Dies geschah nach der *Simpson*schen Formel und zwar in Schritten von $\Delta u=0{,}1$ und in einem Intervall $0<u<u_0$ mit $u_0=3$ bis $u_0=6$ je nach der Konvergenz. Der Rest wurde dann nach entsprechender Vereinfachung des Integranden geschlossen ausgewertet. Aus den Abb. 2 und 3, die die numerischen Ergebnisse wiedergeben, sieht man, daß bereits bei einem Öffnungswinkel von $\alpha=\pi/2$ die Randmomente m_{t_0} mit $r\to 0$ gegen minus Unendlich gehen. Dasselbe gilt offensichtlich für die radialen Biegemomente längs des freien Randes bei ebenfalls $r\to 0$, während in der Nähe der Last diese Momente stets positiv werden und an der Stelle $r=r_0$ eine logarithmische Singularität[1] aufweisen müssen.

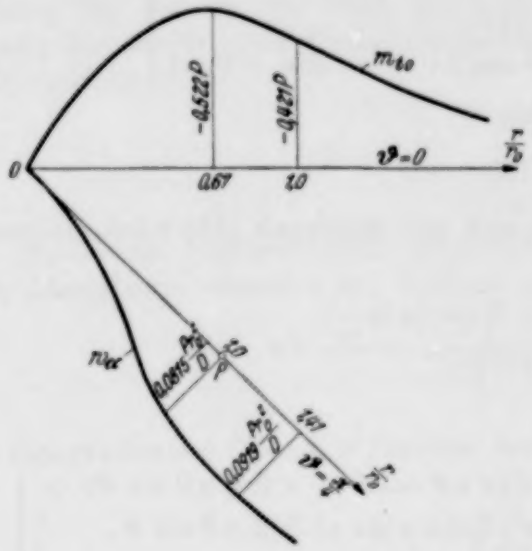


Abb. 2. Einspannmomente m_{t_0} und Durchbiegungen des freien Randes w_Δ beim Öffnungswinkel $\alpha=45°$ (Querdehnungszahl $\nu=0$).

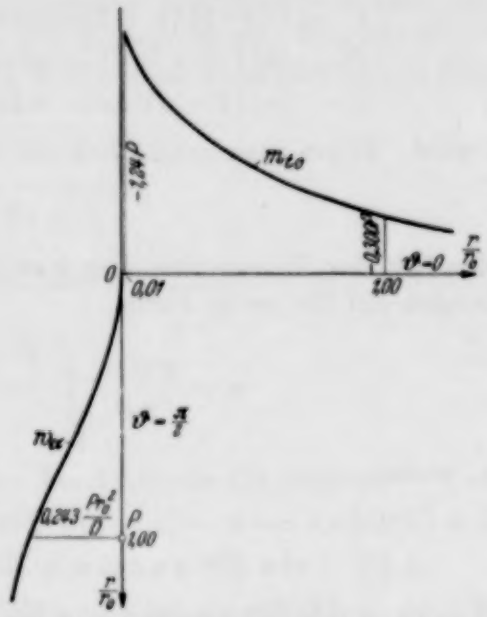


Abb. 3. Einspannmomente m_{t_0} und Durchbiegungen des freien Randes w_Δ beim Öffnungswinkel $\alpha=90°$ (Querdehnungszahl $\nu=0$).

4. Anwendung der Residuen-Rechnung. Enthält der Spannungszustand der Platte im Eckpunkt $r=0$ eine Singularität, so erweist sich die Lösungsform (18) zur Darstellung der Plattenbeanspruchungen in der nächsten Umgebung dieser Stelle als wenig geeignet; in der Tat, die Form des Ausdruckes (21) für die Randmomente gestattet nicht einmal, die Frage nach dem Vorhandensein einer solchen Singularität direkt zu beantworten.

Man kann sich indes die Tatsache zunutze machen, daß das Integral (18), dessen Integrand eine gerade Funktion von u ist, eine bequeme Anwendung des Residuensatzes ermöglicht. Dieser Vorgang setzt vor allem die Kenntnis der Nullstellen der Funktion $N(u)$ im Nenner des Integranden voraus. Da die Wurzel der Gleichung $N(u)=0$ sich nur für $\alpha=2\pi$ und $\alpha=\pi$ explizite angeben lassen, so wird die folgende Untersuchung auf den Fall $\alpha=\pi$ beschränkt und den anderen Fall könnte man ganz analog behandeln.

Mit $\alpha=\pi$ geht die keilförmige Kragplatte in eine Halbebene über, deren Rand längs seiner einen Hälfte ($\vartheta=0$) eingespannt, längs der anderen Hälfte ($\vartheta=\pi$) frei ist und in $r=r_0$, $\vartheta=\pi$ der Voraussetzung gemäß eine Einzelkraft P trägt (Abb. 4). Da in erster Linie der Bereich $r<r_0$ interessiert, so schreiben wir die allgemeine Lösung (18) in die Form

$$w=\frac{2\,P\,r\,r_0}{\pi\,D}\int_0^\infty \frac{G\cos\left(u\ln\frac{r_0}{r}\right)-H\sin\left(u\ln\frac{r_0}{r}\right)}{N\,u\,(1+u^2)}\,du \tag{23}$$

um. Mit $\alpha=\pi$ und den früheren Bezeichnungen (19) erhält man

$$\left.\begin{aligned} G&=2\,\mathfrak{Cof}\,\pi u\,(u\,\mathfrak{Cof}\,u\vartheta\sin\vartheta-\mathfrak{Sin}\,u\vartheta\cos\vartheta)-(1+\nu)\,u\,\mathfrak{Sin}\,\pi u\,\mathfrak{Sin}\,u\vartheta\sin\vartheta\,,\\ H&=-(1+\nu)\,\mathfrak{Sin}\,\pi u\,\mathfrak{Sin}\,u\,\vartheta\sin\vartheta\,,\\ N&=4+(1+\nu)^2+(1-\nu)\,(3+\nu)\,\mathfrak{Cof}\,2\pi u\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

[1] Siehe z. B. *A. Nadai*, Die elastischen Platten, S. 204. Berlin 1925.

Die Anwendung des Residuensatzes auf das Integral (23) führt nun unter Beachtung der vorliegenden Form des Integranden[1] auf den Summenausdruck

$$w = \frac{2\,P r r_0}{\pi D}\left(\pi i \sum R_c + \pi \sum R_s\right) \tag{25}$$

für die elastische Fläche der Platte. Gilt zunächst $r < r_0$, so sind unter R_c die Residuen der Funktion $G \exp(ui \ln r/r_0)/Nu(1+u^2)$ und unter R_s die Residuen der Funktion

$$-H \exp(ui \ln r/r_0)/Nu(1+u^2)$$

in sämtlichen Polen des Integranden zu verstehen, deren imaginärer Teil positiv ist. Das Residuum der beiden Funktionen in $u=1$ ist null und alle anderen Polstellen sind in der Formel

$$u = \pm\frac{k}{2} + \frac{m}{2}\,i \tag{26}$$

mit der reellen Zahl

$$k = \frac{1}{\pi}\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{5+2\nu+\nu^2}{3-2\nu-\nu^2} \tag{27}$$

und $m = 1, 3, 5, \ldots$ enthalten. Nach Ausrechnung der Werte R_c und R_s erhält man den im Bereich $r \leq r_0$ gültigen Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} w = \frac{4\,P r r_0}{\pi D\sqrt{(1-\nu)(3+\nu)}} \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} \Bigg[& \lambda e^{\frac{k\vartheta}{2}} \cos\frac{(m+2)\vartheta + kl}{2} + \mu e^{\frac{k\vartheta}{2}} \sin\frac{(m+2)\vartheta + kl}{2} - \\ & - \lambda e^{-\frac{k\vartheta}{2}} \cos\frac{(m-2)\vartheta - kl}{2} + \mu e^{-\frac{k\vartheta}{2}} \sin\frac{(m-2)\vartheta - kl}{2} - \\ & - (m\mu + k\lambda) e^{-\frac{k\vartheta}{2}} \sin\vartheta \cos\frac{m\vartheta - kl}{2} + \\ & + (k\mu - m\lambda) e^{-\frac{k\vartheta}{2}} \sin\vartheta \sin\frac{m\vartheta - kl}{2} \Bigg] \frac{(-1)^{\frac{m+1}{2}}}{\lambda^2+\mu^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{m}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

worin zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= k^3 + 4k - 3km^2, \\ \mu &= -m^3 + 4m + 3k^2 m, \\ l &= \ln\frac{r_0}{r}. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

gesetzt ist. Die elastische Fläche im Bereich $r > r_0$ ergibt sich durch einfache Vertauschung der Größen r und r_0 in den Formeln (28) und (29). Die Reihe (28) samt ihren partiellen Ableitungen nach r und r_0 konvergiert sehr gut gerade bei kleinem Argument r/r_0 und eignet sich daher vorzüglich zur Darstellung der Spannungskomponenten in der Nähe der Plattenecke. Man erhält insbesondere für die Durchbiegung des freien Randes $\vartheta = \pi$ den Summenausdruck

$$w_\pi = \frac{16\,P r r_0}{\pi D(1-\nu)(3+\nu)} \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{\mu\cos\frac{kl}{2} - \lambda\sin\frac{kl}{2}}{\lambda^2+\mu^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{m}{2}} \tag{30}$$

und für die tangentialen Momente längs $r=0$ den Ausdruck

$$\left.\begin{aligned} m_{t_0} = -\frac{4\,P r_0}{\pi r\sqrt{(1-\nu)(3+\nu)}} \sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty} \Bigg\{ & [(m^2+2m-k^2)\lambda - 2(m+1)k\mu]\cos\frac{kl}{2} + \\ & + [(m^2+2m-k^2)\mu + 2(m+1)k\lambda]\sin\frac{kl}{2} \Bigg\} \frac{(-1)^{\frac{m-1}{2}}}{\lambda^2+\mu^2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\frac{m}{2}}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

die beide für $r \leq r_0$ gelten. Der Verlauf dieser Größen für $\nu = 0$, also für $k = 1/\pi\,\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}\,5/3 = 0{,}34970$ ist in Abb. 4 zur Darstellung gebracht.

[1] Vgl. etwa *E. T. Whittaker* und *G. N. Watson*, A course of modern analysis, S. 115, 4. Auflage. Cambridge 1927.

Wie der Ausdruck (31) lehrt, wird das Einspannmoment an der Plattenecke von der Ordnung $(r_0/r)^{1/2}$ mit negativem Vorzeichen unendlich. Daß das absolut genommene Einspannmoment mit zunehmendem r/r_0 sehr rasch abnimmt und daß die einklemmende Wirkung des Randes sich praktisch auf einen (relativ zu r_0) sehr kleinen Bereich an der Ecke erstreckt, ist wohl auf die besondere Stellung der Einzellast — in der Fortsetzung des eingespannten Randes — zurückzuführen. Man kann schließlich unschwer nachweisen, daß auch die Auflagerkräfte mit $r/r_0 \to 0$ unbegrenzt anwachsen und zwar in der Ordnung von $(r_0/r)^{3/2}$.

5. Kragplatte bei beliebig verteilter Belastung. Bisher wurde nur eine am Plattenrand angebrachte Einzelkraft in Betracht gezogen, die auch der Lösung (18) zugrunde liegt. Bei einem beliebigen Gesetz der Lastverteilung längs des Randes ergibt sich die zugehörige Biegefläche durch einfache Quadratur des

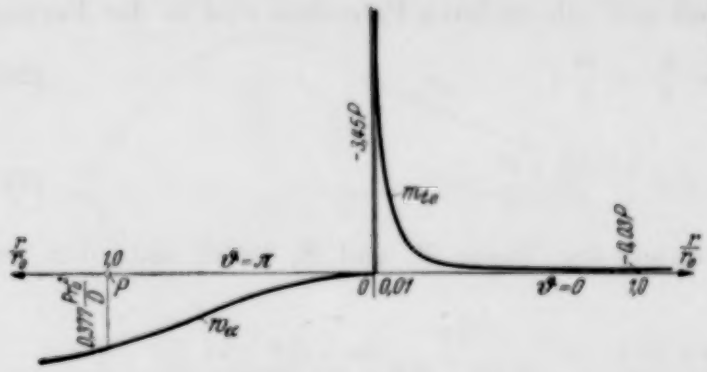


Abb. 4. Einspannmomente m_{t_0} und Durchbiegungen des freien Randes w_α beim Öffnungswinkel $\alpha = 180°$ (Querdehnungszahl $\nu = 0$).

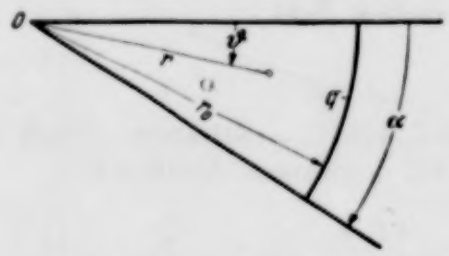


Abb. 5. Kragplatte mit konzentrischer Linienlast.

Ausdruckes (18) in der Veränderlichen r_0. Da die Größe r_0 nur in Potenzen (mit komplexem Exponent) auftritt, ist diese Quadratur bei jeder praktisch möglichen Lastverteilung in geschlossener Form ausführbar.

Etwas komplizierter wird die Frage im Fall einer im Inneren des Plattengebietes, etwa in $r = r_0$, $\vartheta = \vartheta_0 (< \alpha)$ angreifenden Punktlast. Macht man dann für $w(r, \vartheta)$ in den beiden Gebieten $0 < \vartheta < \vartheta_0$ und $\vartheta_0 < \vartheta < \alpha$ zwei verschiedene Ansätze und zwar jedesmal von der Form (4) in Verbindung mit (3), so stehen zur Bestimmung von insgesamt acht unbekannten Koeffizienten, etwa $A_1(s)$, $B_1(s)$, ... $A_2(s)$, $B_2(s)$, ... folgende Bedingungen zur Verfügung: zwei geometrische Bedingungen längs des eingespannten Randes $\vartheta = 0$; zwei Bedingungen für das Verschwinden der Schnittkräfte längs des freien Randes $\vartheta = \alpha$; drei geometrische Kontinuitätsbedingungen längs des Halbmessers $\vartheta = \vartheta_0$ und zwar für w, $\partial w/\partial\vartheta$ und $\partial^2 w/\partial\vartheta^2$; schließlich eine Diskontinuitätsbedingung, die die Differenz der Scherkräfte $-D(1/r)\,\partial(\Delta w)/\partial\vartheta$ zu beiden Seiten von $\vartheta = \vartheta_0$ und die Lastfunktion (9) in der Form der Relation (13) gleichsetzt. Die so erhaltene Einflußfunktion $w(r, \vartheta, r_0, \vartheta_0)$ würde es dann erlauben, die Wirkung einer in beliebiger Weise verteilten Belastung zu erfassen.

6. Kragplatte mit konzentrischer Linienbelastung. Bei gewissen einfacheren Lastanordnungen erweist es sich als zweckmäßig, die Konstruktion einer Einflußfunktion zu umgehen und die Lösung unmittelbar auf der *Mellin*schen Umkehrformel aufzubauen. Die Kragplatte trage beispielsweise eine gleichförmig über den Kreisbogen vom Halbmesser r_0 verteilte Linienlast von der Intensität q (Abb. 5). Die elastische Fläche der Platte hat in diesem Falle der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{2\pi i r_0 D} \int_{\sigma - \infty i}^{\sigma + \infty i} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-(s+4)} ds\,. \tag{32}$$

zu genügen, deren rechter Teil aus (9) hervorgeht und zwar durch Multiplikation mit $\frac{q}{PD}\left(\frac{r_0}{r}\right)^4$. Man überzeugt sich leicht, daß dieser rechte Teil die durch D dividierte vorgeschriebene Lastverteilung als Funktion von r darstellt. Die Lösung der Gleichung (32) kann nun in der Form

$$w = w_0 + w_1 \tag{33}$$

angesetzt werden. Hierin ist

$$w_0 = \frac{q r_0^3}{2\pi i D} \int_{\sigma - \infty ii}^{\sigma + \infty ii} \left(\frac{r_0}{r}\right)^s \frac{ds}{s^2 (s+2)^2} \tag{34}$$

eine Partikularlösung von (32), während w_1 als Lösung der homogenen Gleichung $\Delta\Delta w = 0$ in der Form (4) angenommen werden darf. Für die Gesamtlösung $w_1 + w_0$ müssen die Durchbiegung und die Neigung der elastischen Fläche längs $\vartheta = 0$ verschwinden, desgleichen die tangentialen Biegemomente und die Auflagerkräfte längs $\vartheta = \alpha$; diese vier Bedingungen schreiben sich in Übereinstimmung mit (6) und (12) folgendermaßen hin:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\Theta(s)\right]_{\vartheta=0} + \frac{q r_0^{s+3}}{D s^2 (s+2)^2} = 0\,,\\
&\left[\frac{d\Theta(s)}{d\vartheta}\right]_{\vartheta=0} = 0\,,\\
&\left\{\frac{d^2\Theta(s)}{d\vartheta^2} + [\nu s^2 - (1-\nu)s]\,\Theta(s)\right\}_{\vartheta=\alpha} + \frac{q r_0^{s+3}[(s+1)\nu - 1]}{D s (s+2)^2} = 0\,,\\
&\left\{\frac{d^3\Theta(s)}{d\vartheta^3} + [s^2 + (1-\nu)(s+1)(s+2)]\,\frac{d\Theta(s)}{d\vartheta}\right\}_{\vartheta=\alpha} = 0\,.
\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Sind die Koeffizienten $A(s)$ bis $D(s)$ der Funktion $\Theta(s)$ aus den Gleichungen (35) bestimmt, so bleibt es nur noch übrig, die Gesamtlösung (33) durch die frühere Substitution $u = -(s+1)i$ in die reelle Form überzuführen. Das Endergebnis sei nur für den Sonderfall $\nu = 0$ angegeben. Die beiden Bestandteile von (33) sind dann

$$w_0 = \frac{q r_0^2 r}{\pi D} \int_0^\infty \frac{\cos\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right)}{(1+u^2)^2}\, du = \left\{\begin{aligned} &\frac{q r_0 r^2}{4D}\left(1 + \ln\frac{r_0}{r}\right), && (r < r_0)\\ &\frac{q r_0^2}{4D}\left(1 + \ln\frac{r}{r_0}\right), && (r > r_0)\end{aligned}\right. \tag{36}$$

$$w_1 = \frac{q r_0^2 r}{\pi D} \int_0^\infty \frac{K \cos\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right) + L \sin\left(u \ln \frac{r}{r_0}\right)}{N u (1+u^2)^2}\, du \tag{37}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}
K &= (u^2 \sin 2\alpha - 3u\,\mathfrak{Sin}\,2\alpha u - 4\,\mathfrak{Cof}\,\alpha u \sin\alpha)(u\,\mathfrak{Cof}\,u\vartheta \sin\vartheta - \mathfrak{Sin}\,u\vartheta\cos\vartheta) +\\
&\quad + (3u^2\,\mathfrak{Cof}\,2\alpha u + u^2\cos 2\alpha - 4\,\mathfrak{Cof}\,\alpha u\cos\alpha + 4u\,\mathfrak{Sin}\,\alpha u \sin\alpha)\,\mathfrak{Sin}\,u\vartheta\sin\vartheta -\\
&\quad - N u\,\mathfrak{Cof}\,u\vartheta\cos\vartheta\,.\\
L &= 2\,(u\,\mathfrak{Cof}\,\alpha u\sin\alpha - \mathfrak{Sin}\,\alpha u\cos\alpha)(u\,\mathfrak{Cof}\,u\vartheta\sin\vartheta - \mathfrak{Sin}\,u\vartheta\cos\vartheta) +\\
&\quad + 2[(1-u^2)\,\mathfrak{Sin}\,\alpha u\sin\alpha + 2u(\mathfrak{Cof}\,\alpha u\cos\alpha - 1)]\,\mathfrak{Sin}\,u\vartheta\sin\vartheta\,,\\
N &= 5 + 3\,\mathfrak{Cof}\,2\alpha u + u^2(1 - \cos 2\alpha)\,.
\end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Das Integral in (37) konvergiert etwas besser als das analoge Integral in (18) und läßt sich in ähnlicher Weise numerisch auswerten. Man erhält beispielsweise an der Stelle $r = r_0$, $\vartheta = \alpha$ und für die Öffnungswinkel $\alpha = \pi/4$, $\pi/2$ und π die Durchbiegungen $k Q r_0^2/D$ mit $k = 0{,}0305$; $0{,}0951$ und $0{,}123$, sofern $Q = q r_0 \alpha$ die gesamte, über die Bogenlänge $r_0\alpha$ verteilte Last bezeichnet. Verteilt sich schließlich die Last gleichmäßig auf eine durch die beiden Radien $\vartheta = 0$, $\vartheta = \alpha$ und durch zwei Kreisbögen mit dem Mittelpunkt in $r = 0$ begrenzte Fläche eines Sektors, so ergibt sich die zugehörige elastische Fläche aus der Lösung (36) bis (37) wiederum durch einfache Quadraturen.

7. Schlußbemerkung. Wie die durchgeführte Untersuchung zeigt, lassen sich durch die Anwendung der *Mellin*schen Umkehrformel bequem Lösungen konstruieren, die beliebige Lastbedingungen und auch beliebige Randbedingungen längs der beiden Grenzradien der Platte zu erfüllen vermögen. In einer etwas abgeänderten Form eignen sich diese Lösungen auch dazu, nähere Auskunft über die etwa vorhandene Spannungskonzentration in der Plattenecke selbst zu geben. Die angewandte Methode ist sicherlich nicht hinreichend, um zu gleicher Zeit und in strenger Weise Randbedingungen an etwaigen weiteren Begrenzungslinien des Plattengebietes zu befriedigen; es ist aber wohl denkbar, ein derart erweitertes Problem durch Kombination einiger elastischen Flächen von dem hier behandelten Typus mit einer beliebigen Annäherung zu lösen.

(Eingegangen am 29. Mai 1952.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. *S. Woinowsky-Krieger*, Quebec (Canada) 200, av. Marguerite Bourgeoys, Apt. 8.

Ein Verfahren zur Beurteilung des Gütegrades von Mischungen.

Von K. Stange.

1. Aufgabenstellung. Grundbegriffe und Voraussetzungen. Es werden zwei „körnige" Stoffe (P) und (Q) miteinander „gemischt", und zwar so, daß das Gesamtvolumen V der Mischung die absoluten Anteile V_P bzw. V_Q oder die relativen Anteile

$$\frac{V_P}{V} = P \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{V_Q}{V} = Q \tag{1.1}$$

beider Stoffe enthält. Die Werte P und Q sind bekannt. Wegen $V_P + V_Q = V$ ist

$$P + Q = 1\,. \tag{1.2}$$

Durch eine Stichprobe S, die man der Mischung entnimmt, und die praktisch erheblich kleiner als V sein soll, will man beurteilen, ob an der Entnahmestelle gut durchmischt ist. Es ist einleuchtend, daß die Größe einer solchen Stichprobe nicht ganz beliebig sein darf. Das zeigt die Betrachtung der beiden Grenzfälle:

a) Die Stichprobe S entspricht dem Gesamtvolumen V. Dann ist kein Urteil über die Mischung möglich, denn man findet bei der Analyse nur das triviale Ergebnis, daß die Anteile von (P) und (Q) genau den Werten P und Q entsprechen.

b) Die Stichprobe hat nur die Größe eines einzelnen Kornes oder Elements der gemischten Stoffe. Dieses Teilchen gehört dann entweder zu (P) oder zu (Q); und es ist auch dann kein Urteil über die Mischung möglich.

Die Frage nach der notwendigen Größe einer Stichprobe erscheint danach sinnvoll. Umgekehrt können wir unter der Voraussetzung guter Mischung danach fragen, wie groß das kleinste Volumen $v = \bar{v}$ ist, welches innerhalb vorgeschriebener Genauigkeitsgrenzen in bezug auf die Bestandteile (P) und (Q) als homogen angesehen werden darf. Es soll versucht werden, diese Fragen im folgenden zu beantworten[1].

Wir legen der Untersuchung ein einfaches mathematisches Modell zu Grunde, das die folgenden sechs Voraussetzungen erfüllen soll:

I. Die Mischung besteht nur aus zwei Stoffen (P) und (Q).

II. Die „Körner" seien kugelförmig gestaltet, so daß eine möglichst lückenlose dichte Packung im Raume entsteht.

III. Die Einzelelemente (Körner; Kugeln) seien für jeden einzelnen Bestandteil (P) bzw. (Q) der Mischung gleich groß. Die verschiedenen Bestandteile werden durch unterschiedliche Farben gekennzeichnet; sie sollen entweder schwarz $\equiv (P)$ oder weiß $\equiv (Q)$ sein.

Das Volumen eines einzelnen Teilchens sei ε_P bzw. ε_Q; ihre Anzahl im Gesamtvolumen sei N_P bzw. N_Q. Dann ist

$$N_P\,\varepsilon_P + N_Q\,\varepsilon_Q = V\,. \tag{1.3}$$

Bezeichnen wir die Gesamtzahl der Teilchen im Volumen V mit N, so ist

$$N_P + N_Q = N\,. \tag{1.4}$$

Die bereits in (1.1) erklärten Quotienten $V_P/V = P$ und $V_Q/V = Q$ bezeichnen wir als Volumen-

[1] Durch Herrn Dr. *Weidenhammer*, Clausthal, wurde ich darauf hingewiesen, daß die Frage, wie man Mischungen von körnigen Stoffen beurteilt, schon mehrfach behandelt worden ist, u. a. von *B. Baule* und *A. Benedetti-Pichler* [Z. analyt. Chem. 74 (1928), S. 442], *U. Graf* und *H. J. Henning* [Z. Erzbergb. Metallhüttenwesen 5 (1952), S. 127], *A. B. Manning* [Fuel XXVIII—3 (1948), S. 49] und *J. Visman* [De monsterneming van heterogene binomiale korrelmengsels, in het bijzonder steenkool, 94 S. Groningen 1947]. In diesen Arbeiten steht jedoch eine andere Fragestellung im Vordergrund: Eine Mischung besteht aus zwei körnigen Stoffen (P) und (Q), die beide einen interessierenden dritten Stoff (X) im Gewichtsverhältnis X_P [%] und X_Q [%] enthalten. Gefragt wird, wie groß eine der „Gesamtmischung" entnommene Stichprobe S mindestens sein muß, damit man aus der Analyse der Probe ein mit vorgeschriebener Wahrscheinlichkeit zutreffendes Urteil darüber abgeben kann, wieviel Gewichtsprozent an Stoff (X) die „Gesamtmischung" enthält. — Im folgenden wird eine ganz andere Frage erörtert. Ihre Bearbeitung wurde vom Leiter des Instituts für Chemische Technik der Technischen Hochschule Karlsruhe, Herrn Prof. Dr. *F. A. Henglein*, angeregt.

häufigkeit, die Quotienten

$$\frac{N_P}{N} = p \qquad \text{und} \qquad \frac{N_Q}{N} = q \tag{1.5}$$

als Teilchenhäufigkeit der Mischungsanteile (P) und (Q). Selbstverständlich ist wegen (1.4) auch

$$p + q = 1\,. \tag{1.6}$$

Der Zusammenhang zwischen den Teilchenhäufigkeiten $(p; q)$ und den Volumenhäufigkeiten $(P; Q)$ ist durch die folgenden Beziehungen gegeben, die man leicht aus den vorausgehenden Grundgleichungen herleitet:

$$p = \frac{P/\varepsilon_P}{P/\varepsilon_P + Q/\varepsilon_Q}\,, \qquad q = \frac{Q/\varepsilon_Q}{P/\varepsilon_P + Q/\varepsilon_Q}\,, \tag{1.7}$$

oder umgekehrt

$$P = \frac{p\varepsilon_P}{p\varepsilon_P + q\varepsilon_Q}\,, \qquad Q = \frac{q\varepsilon_Q}{p\varepsilon_P + q\varepsilon_Q}\,. \tag{1.8}$$

IV. Zunächst sollen die Teilchen (P) und (Q) gleich groß sein, also $\varepsilon_P = \varepsilon_Q$. Gemäß (1.8) und (1.6) wird dann

$$p = P \qquad \text{und} \qquad q = Q\,, \tag{1.9}$$

so daß wir Volumenhäufigkeiten und Teilchenhäufigkeiten vorerst nicht zu unterscheiden brauchen, was die Erörterungen ganz wesentlich vereinfacht. Später werden wir uns von dieser Einschränkung freimachen.

Selbstverständlich stellen **I.** bis **IV.** schwerwiegende einschränkende Bedingungen dar, denen in Wirklichkeit kaum eine Mischung entspricht, und es ist nicht leicht zu übersehen, ob eine soweit vereinfachte Modellvorstellung überhaupt für die Erfassung wirklicher Verhältnisse nützlich ist. Schieben wir diesen Einwand vorläufig einmal zurück und stellen wir uns auf den auch sonst zweckmäßigen Standpunkt, daß man mit einfachsten Fällen beginnen und darauf weiter aufbauen muß, dann können wir uns die Entstehung der Mischung nach Abb. 1 folgendermaßen vorstellen: Je ein Behälter ist mit schwarzen (P) und weißen (Q) Kugeln gefüllt, ein dritter, in dem die Mischung entstehen soll, ist leer. Jetzt lassen wir einen Zufallsvorgang (Würfelspiel, Roulette, oder dergl.) ablaufen, bei dem zwei Ereignisse (P) und (Q), die wir den Mischungsanteilen zuordnen, mit den Wahrscheinlichkeiten p und q sich einstellen. Jedesmal, wenn das Ereignis (P) eintritt, legen wir ein Element ε_P in das dritte Gefäß. Entsprechend verfahren wir mit ε_Q, wenn der Zufallsprozeß das Ergebnis (Q) liefert.

Auf diese Weise entsteht in dem dritten Gefäß eine Zufallsmischung der Stoffe (P) und (Q) mit den Teilchenhäufigkeiten p und q. Die mathematischen Gesetzmäßigkeiten, denen der Zufallsprozeß bei wachsender Anzahl der beteiligten Elemente folgt, sind bekannt. Wir brauchen nur die Ergebnisse der mathematischen Statistik nutzbar zu machen. Zu dem Zweck fassen wir n zusammen liegende Teilchen zu einem Raumteil S, der Stichprobe, zusammen. Wir wollen die Raumteile S so wählen, daß sie alle gleiche Gestalt haben und selbst wieder eine Aufteilung des Gesamtraumes ergeben. (Das ist eine an sich unwesentliche Einschränkung, die wir nur zur besseren Veranschaulichung einführen). Wir setzen weiter voraus, daß

V. die Anlagerung benachbarter Teilchen unabhängig voneinander vor sich geht, was gleiches oder wenigstens nahezu gleich s spezifisches Gewicht der Bestandteile erfordert. Diese Forderung schließt bei wirklichen Mischungen auch Fälle aus, in denen etwa Teilchen aus Kupfer und magnetisiertem Stahl miteinander gemischt werden sollen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $\Delta W(n_x, n_y; n)$, daß ein aus n Teilchen bestehender Raumteil $S(n)$ genau n_x schwarze und n_y weiße Kugeln enthält, bekanntlich

$$\Delta W(n_x, n_y; n) = \frac{n!}{n_x!\, n_y!}\, p^{n_x} q^{n_y} \qquad \text{mit} \quad n_x + n_y = n \qquad \text{und} \quad 0 \leq n_x \leq n\,. \tag{1.10}$$

Betrachten wir nun die Gesamtheit der Raumteile S unter der weiteren Voraussetzung,

VI. daß $S \ll V$ oder $n \ll N$ ist, daß also die Zahl der Stichproben, die aus dem Gesamtvolumen V entnommen werden können, sehr groß ist, oder daß die Teilchenzahl n der Stichprobe klein im Vergleich zur Gesamtzahl N bleibt, so verteilen sich die Stichproben in der Mischung

nach der Binomialverteilung

$$(p+q)^n = \sum_{n_x=0}^{n} \frac{n!}{n_x!\, n_y!}\, p^{n_x} q^{n_y} \qquad \text{mit } n_x + n_y = n\,. \tag{1.11}$$

Damit ist die Aufgabe grundsätzlich schon gelöst, aber die Lösung ist insbesondere für große n noch nicht praktisch verwendbar. Um sie brauchbar zu machen, benötigen wir ein paar bekannte Tatsachen der mathematischen Statistik.

2. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung längs der Stichprobengeraden. Durch (1.10) bzw. (1.11) ist in der (n_x, n_y)-Ebene eine Wahrscheinlichkeitsverteilung festgelegt. Es handelt sich um eine entartete ebene Verteilung, bei der nur gewissen Gitterpunkten (n_x, n_y) der Geraden $n_x + n_y = n$ eine von Null verschiedene Wahrscheinlichkeit zugeordnet ist, und zwar den Gitterpunkten des ersten Quadranten (Abb. 2). Tragen wir über jedem Punkt (n_x, n_y) der Geraden $n_x + n_y = n$ die ihm entsprechende Wahrscheinlichkeit $\Delta W(n_x, n_y; n)$ auf

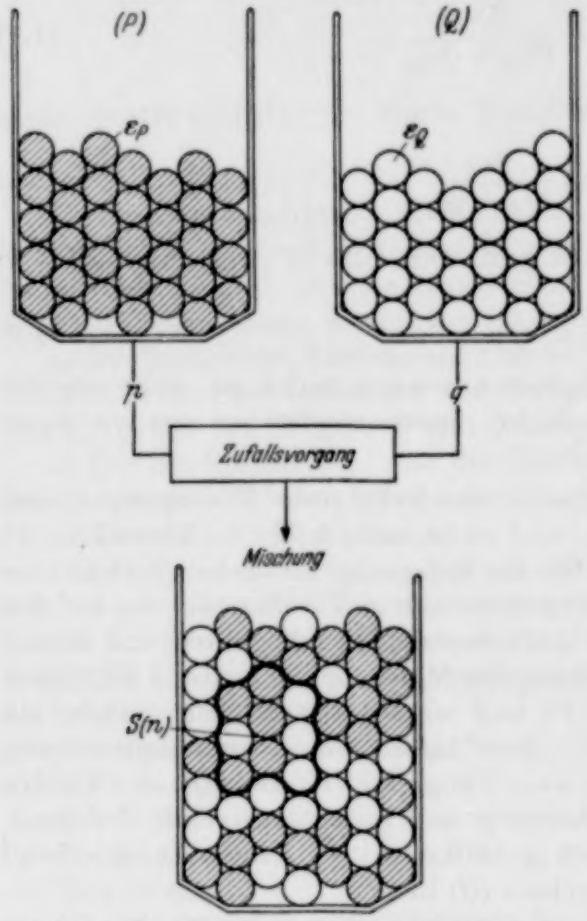


Abb. 1. Zur Entstehung einer Zufallsmischung. Eine Stichprobe $S(n)$ umfaßt n Teilchen.

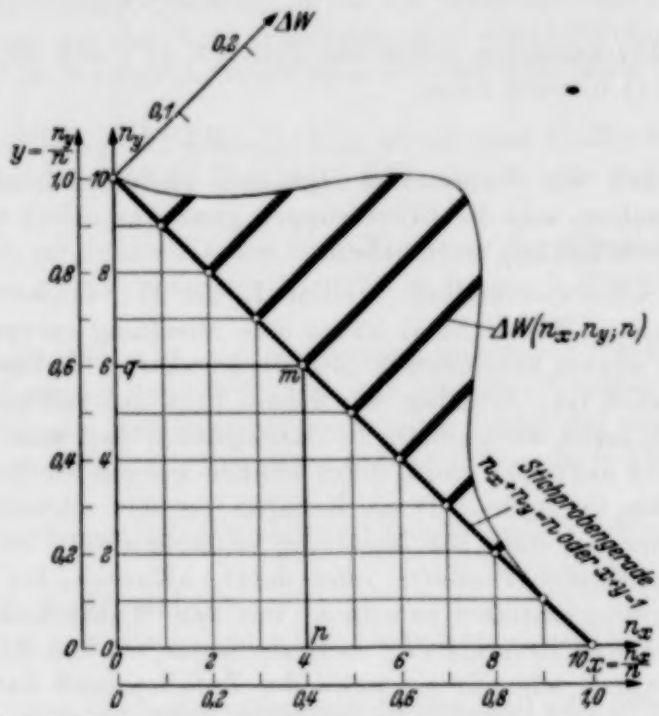


Abb. 2. Die „ebene" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Delta W(n_x, n_y; n)$ für $p = 0{,}4$; $q = 0{,}6$ und $n = 10$.

und legen die entstehende Verteilung in die (n_x, n_y)-Ebene um, so finden wir die in Abb. 2 gegebene Darstellung. Zweckmäßig führen wir hier noch anstelle der absoluten Häufigkeiten (n_x, n_y) für das Vorkommen schwarzer und weißer Kugeln die relativen auf die Stückzahl n der Stichprobe bezogenen Werte

$$\frac{n_x}{n} = x \qquad \text{und} \qquad \frac{n_y}{n} = y \qquad \text{mit } x + y = 1 \tag{2.1}$$

ein.

Die in Abb. 2 durch einen Kamm dargestellte diskrete binomiale Verteilung darf nun für genügend große n in guter Näherung durch eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $m(p; q)$ und der auf den Mittelwert bezogenen Streumatrix

$$\mathfrak{S} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{p(1-p)}{n} & -\frac{pq}{n} \\ -\frac{qp}{n} & \frac{q(1-q)}{n} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

ersetzt werden[1]. Daß es sich hier um eine entartete ebene Verteilung handelt, bei der die

[1] *R. von Mises*, Wahrscheinlichkeitsrechnung, S. 418. New York 1945. — *H. Cramér*, Mathematical Methods of Statistics, S. 318. Princeton 1946.

Gesamtwahrscheinlichkeit in Wirklichkeit längs einer Geraden verteilt ist, kommt dadurch zum Ausdruck, daß die Determinante der Streumatrix verschwindet,

$$\begin{vmatrix} \frac{pq}{n^2} & 1-p & -q \\ & -p & 1-q \end{vmatrix} = 0\,, \tag{2.3}$$

was man wegen $p+q=1$ sofort sieht.

Wesentlich ist, daß die einzelnen Glieder der Streumatrix mit wachsender Teilchenzahl n der Stichprobe gegen 0 streben. Die Verteilung zieht sich also mit wachsendem n mehr und mehr auf eine kleine Umgebung des Punktes $m(p;q)$ zusammen.

Für die weitere Untersuchung haben wir nun zwei Möglichkeiten. Entweder betrachten wir die Verteilung als eine zweidimensionale über der (x, y)-Ebene liegende ausgeartete Verteilung. Dann bleibt der Vorteil der Symmetrie in den Veränderlichen x und y erhalten. Oder wir projizieren die Verteilung

$$\Delta W(x, y) = \Delta W(x, 1-x) = \text{Funkt.}(x) = \Delta W(1-y, y) = \text{Funkt.}(y)$$

auf die x- oder auf die y-Achse. Dann erhalten wir dort eine eindimensionale Verteilung, haben aber entweder x oder y einseitig zum Nachteil der anderen Veränderlichen bevorzugt. Im Grunde genommen ist ein Weg so bequem wie der andere. Von Bedeutung werden diese Unterschiede erst bei drei oder mehr Komponenten in der Mischung.

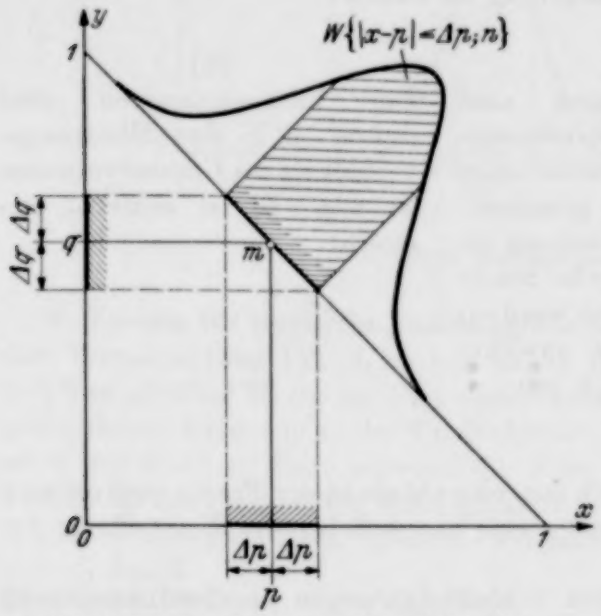


Abb. 3. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit $W\{|x-p| \leq \Delta p;\, n\}$.

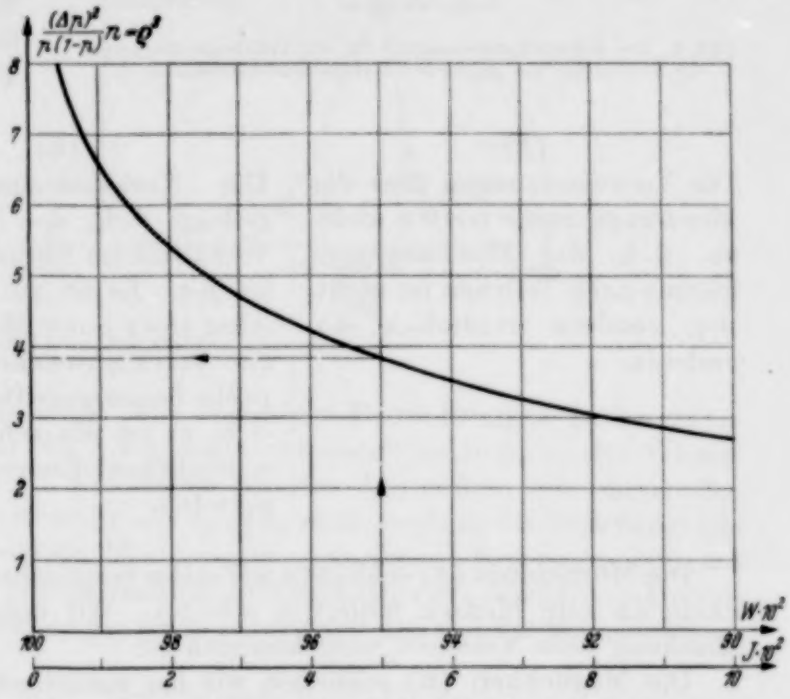


Abb. 4. Zusammenhang zwischen Wahrscheinlichkeit W, Irrtumswahrscheinlichkeit $1-W=J$ und Teilchenzahl n der Stichprobe $S(n)$.

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit W, daß bei gegebenen Werten für die Teilchenhäufigkeiten (p, q) und gegebener Teilchenzahl n der Stichprobe die beobachteten relativen Häufigkeiten (x, y) in den in Abb. 3 geschrafften Bereich

$$|x-p| \leq \Delta p \quad \text{bzw.} \quad |y-q| \leq \Delta q = \Delta p \tag{2.4}$$

hineinfallen. Diese Wahrscheinlichkeit hängt von p, Δp und n ab und ist mit praktisch ausreichender Genauigkeit durch die Fläche unter einer normierten Normalverteilung gegeben, also durch

$$W\{|x-p| \leq \Delta p;\; n\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varrho}^{+\varrho} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt\,, \tag{2.5}$$

wobei die Integrationsgrenzen $\pm\varrho$ aus der Beziehung

$$\varrho = \varrho(p, \Delta p, n) = \frac{\Delta p}{\sqrt{pq}}\sqrt{n} \tag{2.6}$$

berechnet werden müssen. Abb. 4 stellt den durch (2.5) und (2.6) vermittelten Zusammenhang zwischen den Veränderlichen p, Δp, n und W dar. Zu drei gegebenen Größen läßt sich die vierte

einfach berechnen. Zu $p = 0{,}4$, $\Delta p = 0{,}04$ und $W = 0{,}95$ findet man z. B. mit $\varrho^2 = 3{,}84$ die notwendige Teilchenzahl $n = \bar{n} \approx 580$.

Das deuten wir mit Abb. 5 folgendermaßen. Setzen wir einmal voraus, daß das Volumen V mit den Stoffen (P) und (Q) im Verhältnis $p : q = 0{,}40 : 0{,}60$ gut durchmischt ist und entnehmen wir einer sehr groß gedachten Grundgesamtheit V nicht nur eine, sondern zahlreiche Stichproben $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$, . . . von gleicher Teilchenzahl $\bar{n} = 580$, so werden nach der eben durchgeführten Rechnung fast alle diese Proben (nämlich 95%) einen relativen Anteil x im Bereich I oder $0{,}36 \leq x_{\mathrm{I}} \leq 0{,}44$ aufweisen. Nur 5% der Proben besitzen davon abweichende Werte x_{II} mit $|x_{\mathrm{II}} - p| > \Delta p = 0{,}04$ im Bereich II. Entsprechendes gilt sinngemäß für andere Zahlenwerte.

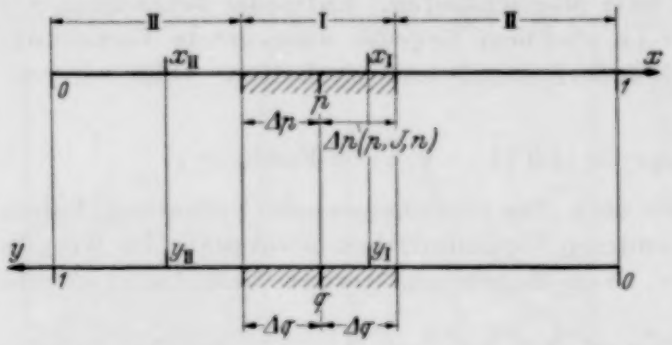


Abb. 5. Der Schwankungsbereich I für die Teilchenhäufigkeiten x der Stichprobe bei gegebener Irrtumswahrscheinlichkeit I.

3. Der statistische Schluß. Jetzt sei umgekehrt eine Mischung V vorgelegt, aus der wir eine einzige Stichprobe S_1 mit $\bar{n} = 580$ Teilchen entnehmen. Diese Stichprobe mag bei der Analyse für (P) und (Q) die Teilchenhäufigkeiten (x_1, y_1) ergeben. Wir erwarten (x_1, y_1) im Bereich I. Liegt der gefundene Stichprobenpunkt (x_1, y_1) jedoch entgegen unserer Erwartung in dem nicht geschrafften Bereich II, so stehen grundsätzlich drei Möglichkeiten offen, aus diesem Tatbestand eine Folgerung zu ziehen:

(A)	(B)	(C)
Die Voraussetzungen über die Mischungsanteile treffen nicht zu, d. h. das Mischungsverhältnis nach Teilchen ist nicht p/q, sondern irrtümlich ein anderes.	Die Voraussetzungen sind richtig, d. h. das Mischungsverhältnis im Gesamtvolumen ist p/q. Es ist gut gemischt. Aber trotz guter Mischung ist eine stark abweichende Stichprobe herausgegriffen worden, d. h. es ist ein sehr unwahrscheinliches Ereignis eingetreten.	Die Voraussetzungen sind richtig, d. h. das Mischungsverhältnis im Gesamtvolumen ist p/q. Es ist schlecht gemischt.

Die Möglichkeit (A) schließen wir selbstverständlich aus, obwohl sie in der Praxis vorkommen kann, da kein Mensch fehlerfrei arbeitet. Wir nehmen also an, daß bei der Herstellung der Mischung kein Versehen vorgekommen ist.

Die Möglichkeit (B) schließen wir bei statistischen Schlußfolgerungen verabredungsgemäß aus. Wir stellen uns also auf den Standpunkt, daß ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit sehr klein ist, bei einmaliger Realisierung seiner Vorbedingungen, also bei einmaliger Beobachtung, nicht eintritt[1].

Dann bleibt also, wenn der Stichprobenpunkt (x, y) im Bereich II liegt, nur die unter (C) getroffene Entscheidung „es ist schlecht gemischt" übrig.

Die statistische Hypothese H, die wir im vorliegenden Falle mit Hilfe der Stichprobe S testen wollen, heißt: „Es ist an der Stelle, an der S entnommen wird, gut durchmischt".

Liegt der Stichprobenpunkt (x_1, y_1) in dem x_{I}-Bereich I, so urteilen wir: Die Hypothese H ist mit dem Befund des Versuchs verträglich. H wird angenommen.

Liegt jedoch (x_1, y_1) außerhalb des geschrafften Bereichs I im Bereich II, so lehnen wir die Hypothese H als unverträglich mit dem versuchsmäßigen Ergebnis ab. Das Urteil lautet dann: „Es ist an der Stelle S nicht gut gemischt".

Da auch bei guter Mischung immerhin noch 5% aller Stichproben im Bereich II liegen, so werden wir bei der eben erläuterten Schlußweise auf lange Sicht in 5% aller Fälle ein Fehlurteil abgeben, nämlich immer dann, wenn trotz „guter Mischung", also bei zutreffender Hypothese H, ein Wertepaar (x_1, y_1) im Bereich II erscheint, der nur die geringe Wahrscheinlichkeit 0,05 für sich hat. Die Wahrscheinlichkeit $J = 1 - W = 1 - 0{,}95 = 0{,}05$ heißt in diesem Zusammenhang auch die Irrtumswahrscheinlichkeit. Es ist also wesentlich, daß man bei allen statistischen

[1] Man vgl. dazu die Erörterungen bei *B. L. van der Waerden*, Studium Generale 1951, S. 65.

Schlüssen eine solche Irrtumswahrscheinlichkeit zulassen muß. Erscheint $J=0{,}05$ als ein zu großer Wert, so steht nichts im Wege, eine kleinere Irrtumswahrscheinlichkeit, etwa $J=0{,}01$ zu wählen und alle Urteile auf diesen Wert aufzubauen. Die Wahl einer Irrtumswahrscheinlichkeit ist kein statistisches Problem. Man ist frei in der Entscheidung, welche Wahrscheinlichkeit man als so klein betrachten will, daß man mit dem Eintreten des Ereignisses bei einmaligem Versuch nicht rechnet. Es handelt sich um eine Willensentscheidung, die von Fall zu Fall verschieden ausfallen wird, und die man in erster Linie nach den Folgen ausrichtet, die eine irrtümliche Entscheidung nach sich ziehen kann[1].

Sind wir damit zufrieden, wenn die beobachtete Teilchenhäufigkeit x der Stichprobe innerhalb eines gegebenen Schwankungsbereichs Δp um den Sollwert p der Grundgesamtheit liegt, lassen wir also eine Schwankung der x-Werte im Bereich $|x-p|\leq\Delta p$ zu, und schreiben wir eine bestimmte Irrtumswahrscheinlichkeit J vor, so entnimmt man aus Abb. 4 die Teilchenzahl $\bar{n}$ der Stichprobe, die zur Beurteilung der Mischung an der Entnahmestelle erforderlich ist. Für $J=0{,}05$ und eine zulässige Schwankung vom Betrage $\Delta p=0{,}04$ um den Sollwert $p=0{,}40$ muß die Stichprobe mindestens aus $\bar{n}=580$ Teilchen bestehen (wie wir vorhin schon ausgerechnet haben). Umfassen die Stichproben mehr Teilchen ($n>\bar{n}$), so sind die Schwankungen der Häufigkeit x geringer, für $n<\bar{n}$ sind sie größer als Δp.

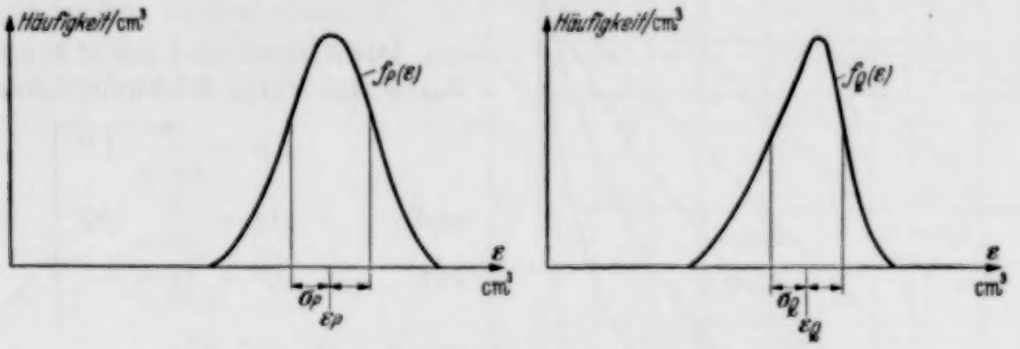


Abb. 6. Die Häufigkeitskurven für die Teilchengrößen.

4. Lösung für ungleiche Teilchengröße $\varepsilon_P\neq\varepsilon_Q$. Alle bisherigen Betrachtungen galten unter der Voraussetzung IV, d. h. wir haben für die „Elementarvolumen" ε_P bzw. ε_Q der Einzelteilchen gleiche Werte $\varepsilon_P=\varepsilon_Q$ angenommen. Wir wollen uns im folgenden von dieser Beschränkung freimachen. In Wirklichkeit wird nicht nur $\varepsilon_P\neq\varepsilon_Q$ sein, sondern die Teilchengröße wird von Korn zu Korn schwanken. Eine vor der Mischung vorgenommene feinere Analyse der Teilchengröße ε und ihrer Häufigkeiten f_P und f_Q mag für (P) und (Q) zwei Verteilungskurven $f_P(\varepsilon)$ und $f_Q(\varepsilon)$ nach Abb. 6 geben. Wir berechnen für beide Häufigkeitskurven die Mittelwerte ε_P und ε_Q durch

$$\varepsilon_P=\int_0^\infty \varepsilon f_P(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad \text{und} \qquad \varepsilon_Q=\int_0^\infty \varepsilon f_Q(\varepsilon)\,d\varepsilon \tag{4.1}$$

und die auf diese Mittelwerte bezogenen Streuungen σ_P^2 und σ_Q^2 durch

$$\sigma_P^2=\int_0^\infty (\varepsilon-\varepsilon_P)^2 f_P(\varepsilon)\,d\varepsilon \qquad \text{und} \qquad \sigma_Q^2=\int_0^\infty (\varepsilon-\varepsilon_Q)^2 f_Q(\varepsilon)\,d\varepsilon\,. \tag{4.2}$$

Wir wollen voraussetzen, daß die Streumaße σ_P und σ_Q „klein" gegen die entsprechenden Mittelwerte ε_P und ε_Q sind,

$$\sigma_P\ll\varepsilon_P \qquad \text{und} \qquad \sigma_Q\ll\varepsilon_Q\,, \tag{4.3}$$

und daß ε_P und ε_Q wenigstens von gleicher Größenordnung sind (daß man also, anschaulich gesprochen, nicht Mehl und Pflastersteine zusammen mischt.) In diesem Falle wird man anstelle der von Korn zu Korn veränderlichen Teilchengröße die Mittelwerte ε_P und ε_Q zugrundelegen dürfen. Diese Näherung ist in einem bemerkenswert weiten Bereich brauchbar, wie eine weitere Untersuchung gezeigt hat.

Wir haben nun die Ergebnisse, die wir für die Teilchenhäufigkeiten $(x;y)$ gefunden haben, auf die Volumenhäufigkeiten

$$X=\frac{v_x}{v} \qquad \text{und} \qquad Y=\frac{v_y}{v} \tag{4.4}$$

[1] *H. Münzner*, Mitteilungsbl. math. Statistik 1 (1949), S. 5, 69 und 185.

zu übertragen. Dabei ist v_x das von den n_x Teilchen (P) eingenommene Volumen. Entsprechend ist v_y erklärt, und v ist das Gesamtvolumen der Stichprobe.

Es ist ähnlich wie in (1.8) und (1.7)

$$X = \frac{x\,\varepsilon_P}{x\,\varepsilon_P + y\,\varepsilon_Q}, \qquad Y = \frac{y\,\varepsilon_Q}{x\,\varepsilon_P + y\,\varepsilon_Q} \tag{4.5}$$

und

$$x = \frac{X/\varepsilon_P}{X/\varepsilon_P + Y/\varepsilon_Q}, \qquad y = \frac{Y/\varepsilon_Q}{X/\varepsilon_P + Y/\varepsilon_Q}. \tag{4.6}$$

Abb. 7 zeigt den Zusammenhang zwischen den Volumenhäufigkeiten (P, Q) und den Teilchenhäufigkeiten (p, q) im Gesamtvolumen für verschiedene Verhältnisse $\varepsilon_P/\varepsilon_Q$ der Elementarvolumen. Einer Mischung mit den vorgeschriebenen Volumenhäufigkeiten (P; Q) und zulässigen Toleranzbereichen für die Stichproben (ΔP; ΔQ) mit $\Delta P + \Delta Q = 0$ entspricht ein Wertepaar (p; q) der Teilchenhäufigkeiten mit zulässigen Toleranzbereichen (Δp; Δq). Zur Berechnung dieser Bereiche führen wir zweckmäßig die Hilfsgröße $\bar{\varepsilon}$, das mittlere Elementarvolumen in der Mischung, durch

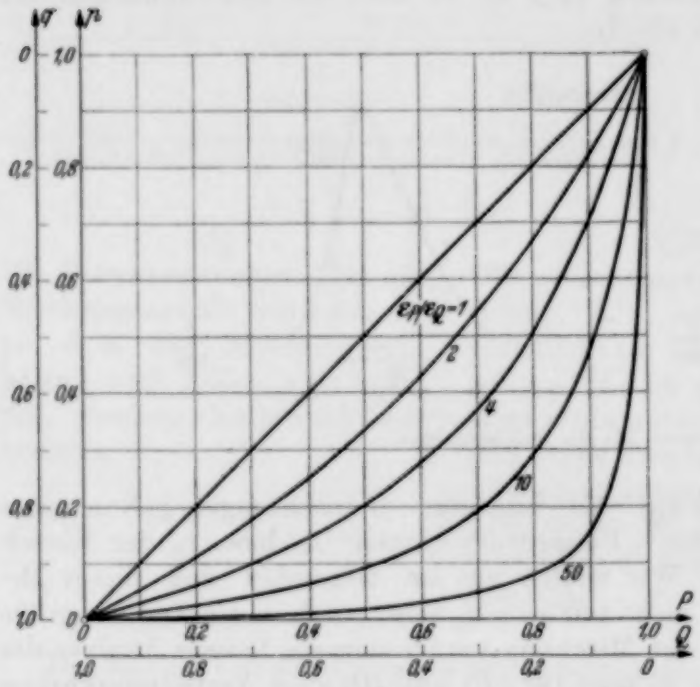


Abb. 7. Der Zusammenhang zwischen den Volumenhäufigkeiten (P, Q) und den Teilchenhäufigkeiten (p, q) in Abhängigkeit vom Volumenverhältnis $\varepsilon_P/\varepsilon_Q$.

$$\bar{\varepsilon} = p\,\varepsilon_P + q\,\varepsilon_Q \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{\bar{\varepsilon}} = \frac{P}{\varepsilon_P} + \frac{Q}{\varepsilon_Q} \tag{4.7}$$

ein. Dann findet man aus (1.8) oder $\varepsilon_P p = \bar{\varepsilon} P$ durch eine kurze Rechnung leicht

$$\left.\begin{aligned} \Delta p &= \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\varepsilon_P \varepsilon_Q}\,\Delta P \\ \text{und} \qquad \Delta q &= \frac{\bar{\varepsilon}^2}{\varepsilon_P \varepsilon_Q}\,\Delta Q \\ \text{mit} \qquad \Delta p + \Delta q &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4.8}$$

Für die relativen Änderungen folgt daraus

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_Q}\,\frac{\Delta P}{P} \quad \text{und} \quad \frac{\Delta q}{q} = \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_P}\,\frac{\Delta Q}{Q}. \tag{4.9}$$

Zu W bzw. $1 - W = J$ und den eben gefundenen Werten p und Δp bestimmt man nach den Ergebnissen des Abschnitts 2 die notwendige Teilchenzahl $n = \bar{n}$. Das dazugehörige Volumen $v = \bar{v}$ der Stichprobe ist dann

$$\bar{v} = (\bar{n}\,p)\varepsilon_P + (\bar{n}\,q)\varepsilon_Q = \bar{n}\,\bar{\varepsilon}\,. \tag{4.10}$$

Damit ist die Größe des innerhalb gegebener Toleranzbereiche (ΔP, ΔQ) als „homogen" anzusehenden Volumens $\bar{v}$ bestimmt, wenn die Volumenhäufigkeiten (P, Q) gegeben sind.

5. Proben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl und Proben $S(v)$ gleichen Volumens. Mit einem Einwand müssen wir uns noch auseinandersetzen. Die in den vorausgehenden Abschnitten entwickelte Mischungstheorie verlangte die Entnahme von Proben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl $n = \bar{n}$. Das ist aber nicht so einfach zu verwirklichen. Wir können leicht Proben gleichen Volumens, etwa 1 cm³, 1 dm³, ... entnehmen. Wie sollen wir aber Proben von $n = 5600$ Teilchen oder dergleichen erfassen? Wenn es auch keine unüberwindlichen Schwierigkeiten macht, Verfahren zur Entnahme solcher Stichproben zu ersinnen (etwa für Laborbetrieb), so wird man praktisch doch nur mit Proben $S(v)$ gleichen Volumens $v = \bar{v}$ arbeiten können. Wenn jedoch die Elementarvolumen ε_P und ε_Q sich voneinander unterscheiden, so sind Proben $S(n)$ fester Teilchenzahl $n = \bar{n}$ nicht zugleich Proben gleichen Volumens, sondern mit schwankender Zusammensetzung der Probe muß bei fester Teilchenzahl $n = \bar{n}$ das Volumen schwanken, wie es Abb. 8 anschaulich zum Ausdruck bringt. Aus Gründen der einfachen und raschen Handhabung wird man nun stets Proben $S(v)$ gleichen Volumens $v = \bar{v}$ wählen. Dann muß man Schwankungen in der Teilchenzahl in Kauf nehmen, und die Frage ist, ob dadurch die Ergebnisse unserer Theorie wesentlich beeinflußt werden, d. h. ob die nur für Proben $S(n)$ hergeleiteten Gesetzmäßigkeiten, insbesondere die Toleranzbereiche, auch für Proben $S(v)$ gelten. Wir wollen im folgenden zeigen, daß das innerhalb gewisser Grenzen der Fall ist.

Zu dem Zweck berechnen wir in Abb. 9 bei gegebenen Werten (p, q) der Teilchenhäufigkeiten, zugelassenen Toleranzen $(\Delta p, \Delta q)$ und vorgeschriebener Irrtumswahrscheinlichkeit $J = 1 - W$ die Grenzkurven K' und K'', welche die Bereiche für die Teilchenzahlen n_x und n_y bei gewähltem n abgrenzen.

Gemäß (2.4) und (2.6) sind diese Grenzlinien in Parameterdarstellung durch

$$n_x = np \pm \varrho(J)\sqrt{pq}\,\sqrt{n} \qquad \text{und} \qquad n_y = nq \mp \varrho(J)\sqrt{pq}\,\sqrt{n} \tag{5.1}$$

gegeben, wobei n der Parameter ist.

Ist nun $\bar{n}$ die zu den festen Werten $(p, \Delta p, J)$ nach Abschnitt 2 gehörende notwendige Teilchenzahl der Probe und $\bar{v} = \bar{n}\,\bar{\varepsilon}$ ihr Volumen, so hat eine Linie konstanten Volumens in Abb. 9 die Gestalt

$$n_x \varepsilon_P + n_y \varepsilon_Q = \bar{v} = \bar{n}\,\bar{\varepsilon}\,. \tag{5.2}$$

Entnehmen wir nun zahlreiche Proben gleichen Volumens $\bar{v}$, so werden diese bei guter Mischung ohne Rücksicht auf den Wert von n jedenfalls in dem durch K' und K'' abgegrenzten Konfidenzbereich liegen, der sich nach außen hin für wachsende n mit $\sqrt{n}$ erweitert.

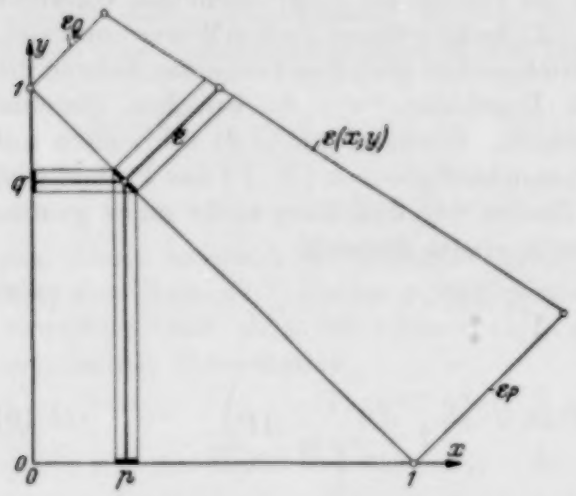


Abb. 8. Zur Veranschaulichung der Volumenschwankung Δv bzw. $\Delta\varepsilon$ in Stichproben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl $n = \bar{n}$ für $P = 0{,}40$; $Q = 0{,}60$; $\varepsilon_P/\varepsilon_Q = 2$; $\Delta P = 0{,}04$.

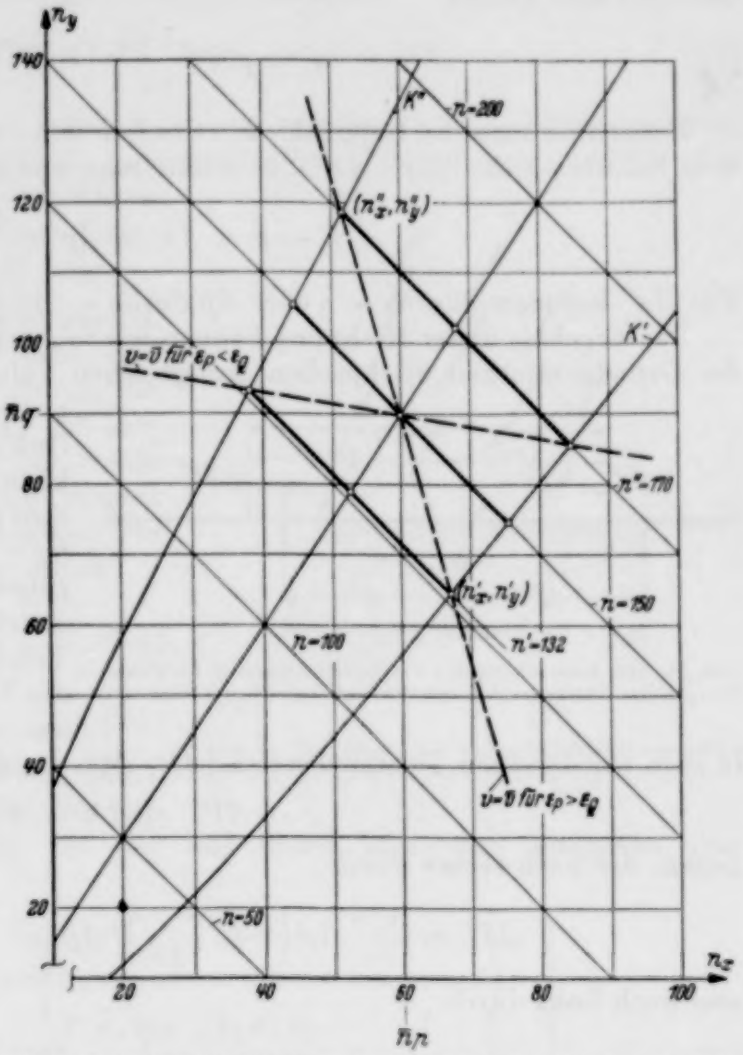


Abb. 9. Zur Berücksichtigung der veränderlichen Teilchenzahl bei Stichproben $S(v)$ gleichen Volumens $v = \bar{v}$.

Im äußersten Falle enthalten diese Proben demnach

$$n' = n'_x + n'_y = \bar{n} + \Delta n' \qquad \text{bzw.} \qquad n'' = n''_x + n''_y = \bar{n} + \Delta n'' \tag{5.3}$$

Teilchen. Die Wertepaare (n'_x, n'_y) und (n''_x, n''_y) müssen sowohl die Gleichung (5.2) der Geraden $v = \bar{v}$ als auch die Gleichungen (5.1) der Grenzlinien K' und K'' erfüllen. Aus beiden Bedingungen findet man nach kurzer Rechnung zur Bestimmung von $\Delta n'$ die Beziehung

$$\Delta n' + \varrho\,\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{\bar{\varepsilon}}\,\sqrt{pq\bar{n}}\,\sqrt{1 + \frac{\Delta n'}{\bar{n}}} = 0\,. \tag{5.4}$$

Für $\Delta n''$ hat man nur ϱ durch $-\varrho$ zu ersetzen.

Die letzte Gleichung wird man (nicht als quadratische Gleichung für $\Delta n'$ sondern) iterativ durch

$$\Delta n'_{s+1} = -\varrho\,\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{\bar{\varepsilon}}\,\sqrt{pq^n}\,\sqrt{1 + \frac{\Delta n'_s}{\bar{n}}} \tag{5.5}$$

lösen (s = Schrittzahl). Man findet in erster Näherung

$$\frac{\Delta n'}{\bar{n}} \approx \frac{\Delta n'_1}{\bar{n}} = -\,\frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{\bar{\varepsilon}}\,\varrho\,\sqrt{\frac{pq}{\bar{n}}}\,. \tag{5.6}$$

Ein zweiter Schritt ist im allgemeinen nicht notwendig, (wenn man die sonstigen in der Theorie enthaltenen idealisierten Voraussetzungen in Betracht zieht).

Berechnet man nun aus n'_x und n' die zugeordnete Teilchenhäufigkeit x', so erhält man

$$x' = \frac{n'_x}{n'} = \frac{n'p + \varrho\sqrt{pq}\sqrt{n'}}{n'} \qquad \text{oder mit (5.3)} \qquad x' = p + \frac{\varrho\sqrt{pq}}{\sqrt{\bar{n}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta n'}{\bar{n}}}}.$$

Mit (5.6) wird daraus

$$x' \approx p + \frac{\varrho\sqrt{pq}}{\sqrt{\bar{n}}}\left(1 + \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2\bar{\varepsilon}} \frac{\varrho\sqrt{pq}}{\sqrt{\bar{n}}}\right). \tag{5.7}$$

Bezeichnet man die Unterschiede zwischen den „äußersten" Stichprobenwerten $(x'; x'')$ und dem Sollwert p mit $(\Delta x'; \Delta x'')$, so erhält man aus (5.7) mit (2.6)

$$x' - p = \Delta x' \approx \Delta p + \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2\bar{\varepsilon}} (\Delta p)^2. \tag{5.8}$$

Für $\Delta x''$ hat man ϱ durch $-\varrho$ oder Δp durch $-\Delta p$ zu ersetzen.

Das Ergebnis dieser Rechnung können wir folgendermaßen zusammenfassen: Entnimmt man der Grundgesamtheit Stichproben $S(v)$ gleichen Volumens $\bar{v}$, so schwankt deren Teilchenzahl n zwischen n' und n''. Der damit verbundene Einfluß auf die Teilchenhäufigkeit x ist nach (5.8) klein von zweiter Ordnung in (Δp). Solange also der als Faktor bei $(\Delta p)^2$ stehende Quotient $(\varepsilon_P - \varepsilon_Q)/2\bar{\varepsilon}$ keine extrem großen Werte annimmt, geben Stichproben gleichen Volumens nahezu die gleichen Ergebnisse wie Stichproben gleicher Teilchenzahl. Rechnen wir (5.8) schließlich auf die Volumenhäufigkeiten (X, Y) der Proben $S(v)$ um, so finden wir, daß diese nicht mehr genau in dem zugelassenen Toleranzbereich $(\Delta P, \Delta Q)$, sondern in einem Bereich

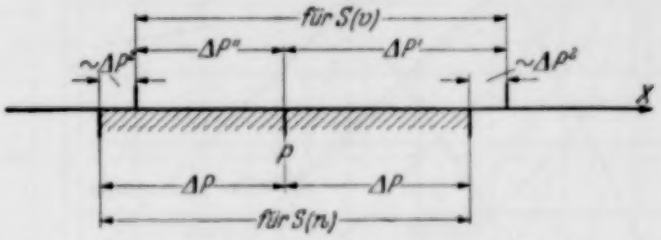


Abb. 10. Die Schwankung der Volumenhäufigkeit X für Proben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl $\bar{n}$ und Proben $S(v)$ gleichen Volumens $\bar{v}$.

$$-\Delta P'' \leq \Delta X = X - P \leq \Delta P' \tag{5.9}$$

liegen, der nach rechts durch

$$\Delta P' \approx \frac{\varepsilon_P \varepsilon_Q}{\bar{\varepsilon}^2} \Delta p \left(1 + \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2\bar{\varepsilon}} \Delta p\right) = \Delta P \left(1 + \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_P \varepsilon_Q} \Delta P\right) \tag{5.10}$$

und nach links durch

$$\Delta P'' \approx \Delta P \left(1 - \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_P \varepsilon_Q} \Delta P\right) \tag{5.11}$$

begrenzt wird. Dieser Bereich ist nach Abb. 10 gegenüber dem ursprünglichen $\pm\Delta P$ für $\varepsilon_P > \varepsilon_Q$ nach rechts und für $\varepsilon_P < \varepsilon_Q$ nach links verschoben. Diese Verschiebung ist jedoch nur von der Größenordnung $(\Delta P)^2$.

Mit diesen Ergebnissen haben wir uns von den eingangs aufgezählten einschränkenden Voraussetzungen **II.**, **III.** und **IV.** befreit.

6. Mischung aus drei Stoffen; die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bisher haben wir uns auf den einfachen Fall einer Mischung zweier Stoffe (P) und (Q) beschränkt. Jetzt nehmen wir einen dritten Mischungsanteil (R) hinzu. Wir lassen also auch noch die Voraussetzung **I.** fallen. Die vorgeschriebenen Volumenhäufigkeiten der drei Stoffe im Gesamtvolumen seien P, Q und R mit $P + Q + R = 1$, die zulässigen Toleranzen entsprechend ΔP, ΔQ und ΔR mit $\Delta P + \Delta Q + \Delta R = 0$. Die gegebenen Volumenhäufigkeiten P, Q, R, die mittleren Elementarvolumen ε_P, ε_Q, ε_R und die ihnen zugeordneten Teilchenhäufigkeiten p, q, r sind jetzt entsprechend zu (1.7) und (1.8) durch

$$\varepsilon_P\, p = \bar{\varepsilon} P, \qquad \varepsilon_Q\, q = \bar{\varepsilon} Q, \qquad \varepsilon_R\, r = \bar{\varepsilon} R \tag{6.1}$$

miteinander verknüpft, wie man durch eine der früheren ähnliche Rechnung nachweist. Dabei ist ähnlich wie in (4.7) die Hilfsgröße $\bar{\varepsilon}$ jetzt durch

$$\bar{\varepsilon} = p\varepsilon_P + q\varepsilon_Q + r\varepsilon_R \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{\bar{\varepsilon}} = \frac{P}{\varepsilon_P} + \frac{Q}{\varepsilon_Q} + \frac{R}{\varepsilon_R} \tag{6.2}$$

erklärt. Diese Gleichungen lassen sich leicht auf mehr als drei Mischungsanteile verallgemeinern. Es tritt dann jeweils ein neuer gleich gebauter Summand hinzu. Die Reihenfolge der Stoffe (P), (Q) und (R) denken wir so gewählt, daß

$$p \leq q \leq r \tag{6.3}$$

ausfällt, was keine Einschränkung der Allgemeinheit unserer Untersuchung bedeutet.

Eine aus n Teilchen bestehende Probe, die für die Anteile (P), (Q) und (R) genau die Teilchenzahlen n_x, n_y und n_z besitzt, hat bekanntlich die Wahrscheinlichkeit

$$\Delta W(n_x, n_y, n_z; n) = \frac{n!}{n_x!\, n_y!\, n_z!}\, p^{n_x} q^{n_y} r^{n_z} \quad \text{mit} \quad n_x + n_y + n_z = n\,. \tag{6.4}$$

Durch (6.4) ist eine dreidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung im (n_x, n_y, n_z)-Raum gegeben, die jedoch wegen der Zusatzbedingung in (6.4) zu einer ebenen Verteilung entartet, und die allen im ersten Oktanten gelegenen Gitterpunkten der Ebene $n_x + n_y + n_z = n$ eine von 0 verschiedene Wahrscheinlichkeit zuordnet, wie es Abb. 11 anschaulich zeigt.

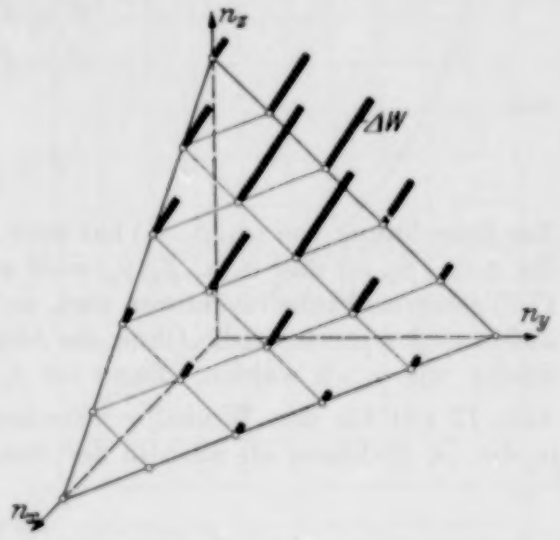


Abb. 11. Die „räumliche" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Delta W(n_x, n_y, n_z; n)$ für $p = 0{,}2$; $q = 0{,}3$; $r = 0{,}5$ und $n = 5$.

7. Die Ersatzverteilung für große Teilchenzahlen. Von praktischer Bedeutung ist nun die Tatsache, daß auch die hier auftretende trinomische Verteilung, die durch Entwicklung des Ausdrucks $(p+q+r)^n$ entsteht, für genügend große Teilchenzahl n der Stichprobe wieder durch eine Normalverteilung ersetzt werden darf. Zweckmäßig führen wir ebenso wie früher die Teilchenhäufigkeiten der Probe durch

$$x = \frac{n_x}{n}, \qquad y = \frac{n_y}{n}, \qquad z = \frac{n_z}{n} \tag{7.1}$$

mit

$$x + y + z = 1 \tag{7.2}$$

ein. Dann entsteht für genügend große Werte von n über der Ebene (7.2) des (x, y, z)-Raumes eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $m(p, q, r)$ und der auf diesen Mittelwert bezogenen symmetrischen Streumatrix

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}(m) &= \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y \varrho_{xy} & \sigma_x \sigma_z \varrho_{xz} \\ \sigma_y \sigma_x \varrho_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_y \sigma_z \varrho_{yz} \\ \sigma_z \sigma_x \varrho_{zx} & \sigma_z \sigma_y \varrho_{zy} & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n} \left(\begin{array}{cc:c} p(1-p) & -pq & -pr \\ -qp & q(1-q) & -qr \\ \hdashline -rp & -rq & r(1-r) \end{array}\right) = \frac{1}{n}\,\mathfrak{S}^*\,, \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

wobei $\mathfrak{S}^*$ eine Matrix ist, deren Elemente nur von den Teilchenhäufigkeiten p, q, r abhängen. Auch hier zeigt man leicht, daß die Determinante der Matrix verschwindet, und daß die Matrix selbst den Rang 2 hat, denn die in der linken oberen Ecke stehende zweireihige Determinante hat wegen $p+q+r=1$ den Wert $pqr \neq 0$.

Zur weiteren Untersuchung stehen nun wieder die bereits im Abschnitt 2 genannten zwei Wege offen:

a) Entweder projizieren wir alle „Gitterpunkte" $G(x, y, z)$ der Ebene (7.2) in die ihnen entsprechenden Gitterpunkte $G'(x, y)$ der waagerechten (x, y)-Ebene und ordnen den Punkten G' die durch (6.4) gegebene Wahrscheinlichkeit ΔW zu. Dann geht aber die Symmetrie in den Veränderlichen p, q, r verloren. Zweckmäßiger ist deshalb die zweite Möglichkeit.

b) Wir bestimmen die der Streumatrix $\mathfrak{S}^*$ zugeordneten Hauptachsen durch Lösung der in λ kubischen Hauptachsengleichung ($\mathfrak{E}$ = Einheitsmatrix)

$$|\mathfrak{S}^* - \lambda \mathfrak{E}| = 0\,. \tag{7.4}$$

Da die Determinante $|\mathfrak{S}^*|$ der Matrix $\mathfrak{S}^*$ verschwindet, so sieht man, daß $\lambda = \lambda_0 = 0$ eine Lösung der Hauptachsengleichung ist. Zur Berechnung der beiden andern Lösungen findet man aus (7.4)

Ein zweiter Schritt ist im allgemeinen nicht notwendig, (wenn man die sonstigen in der Theorie enthaltenen idealisierten Voraussetzungen in Betracht zieht).

Berechnet man nun aus n'_x und n' die zugeordnete Teilchenhäufigkeit x', so erhält man

$$x' = \frac{n'_x}{n'} = \frac{n'p + \varrho\sqrt{pq}\sqrt{n'}}{n'} \qquad \text{oder mit (5.3)} \qquad x' = p + \frac{\varrho\sqrt{pq}}{\sqrt{\bar{n}}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta n'}{\bar{n}}}}.$$

Mit (5.6) wird daraus

$$x' \approx p + \frac{\varrho\sqrt{pq}}{\sqrt{\bar{n}}}\left(1 + \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2\bar{\varepsilon}} \frac{\varrho\sqrt{pq}}{\sqrt{\bar{n}}}\right). \tag{5.7}$$

Bezeichnet man die Unterschiede zwischen den „äußersten" Stichprobenwerten $(x'; x'')$ und dem Sollwert p mit $(\Delta x'; \Delta x'')$, so erhält man aus (5.7) mit (2.6)

$$x' - p = \Delta x' \approx \Delta p + \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2\bar{\varepsilon}} (\Delta p)^2. \tag{5.8}$$

Für $\Delta x''$ hat man ϱ durch $-\varrho$ oder Δp durch $-\Delta p$ zu ersetzen.

Das Ergebnis dieser Rechnung können wir folgendermaßen zusammenfassen: Entnimmt man der Grundgesamtheit Stichproben $S(v)$ gleichen Volumens $\bar{v}$, so schwankt deren Teilchenzahl n zwischen n' und n''. Der damit verbundene Einfluß auf die Teilchenhäufigkeit x ist nach (5.8) klein von zweiter Ordnung in (Δp). Solange also der als Faktor bei $(\Delta p)^2$ stehende Quotient $(\varepsilon_P - \varepsilon_Q)/2\bar{\varepsilon}$ keine extrem großen Werte annimmt, geben Stichproben gleichen Volumens nahezu die gleichen Ergebnisse wie Stichproben gleicher Teilchenzahl. Rechnen wir (5.8) schließlich auf die Volumenhäufigkeiten (X, Y) der Proben $S(v)$ um, so finden wir, daß diese nicht mehr genau in dem zugelassenen Toleranzbereich $(\Delta P, \Delta Q)$, sondern in einem Bereich

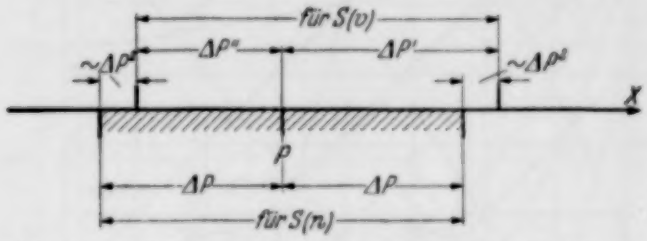


Abb. 10. Die Schwankung der Volumenhäufigkeit X für Proben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl $\bar{n}$ und Proben $S(v)$ gleichen Volumens $\bar{v}$.

$$-\Delta P'' \leq \Delta X = X - P \leq \Delta P' \tag{5.9}$$

liegen, der nach rechts durch

$$\Delta P' \approx \frac{\varepsilon_P \varepsilon_Q}{\bar{\varepsilon}^2} \Delta p \left(1 + \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2\bar{\varepsilon}} \Delta p\right) = \Delta P \left(1 + \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_P \varepsilon_Q} \Delta P\right) \tag{5.10}$$

und nach links durch

$$\Delta P'' \approx \Delta P \left(1 - \frac{\varepsilon_P - \varepsilon_Q}{2} \frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon_P \varepsilon_Q} \Delta P\right) \tag{5.11}$$

begrenzt wird. Dieser Bereich ist nach Abb. 10 gegenüber dem ursprünglichen $\pm \Delta P$ für $\varepsilon_P > \varepsilon_Q$ nach rechts und für $\varepsilon_P < \varepsilon_Q$ nach links verschoben. Diese Verschiebung ist jedoch nur von der Größenordnung $(\Delta P)^2$.

Mit diesen Ergebnissen haben wir uns von den eingangs aufgezählten einschränkenden Voraussetzungen **II.**, **III.** und **IV.** befreit.

6. Mischung aus drei Stoffen; die Wahrscheinlichkeitsverteilung. Bisher haben wir uns auf den einfachen Fall einer Mischung zweier Stoffe (P) und (Q) beschränkt. Jetzt nehmen wir einen dritten Mischungsanteil (R) hinzu. Wir lassen also auch noch die Voraussetzung **I.** fallen. Die vorgeschriebenen Volumenhäufigkeiten der drei Stoffe im Gesamtvolumen seien P, Q und R mit $P + Q + R = 1$, die zulässigen Toleranzen entsprechend ΔP, ΔQ und ΔR mit $\Delta P + \Delta Q + \Delta R = 0$. Die gegebenen Volumenhäufigkeiten P, Q, R, die mittleren Elementarvolumen ε_P, ε_Q, ε_R und die ihnen zugeordneten Teilchenhäufigkeiten p, q, r sind jetzt entsprechend zu (1.7) und (1.8) durch

$$\varepsilon_P\, p = \bar{\varepsilon}\, P, \qquad \varepsilon_Q\, q = \bar{\varepsilon}\, Q, \qquad \varepsilon_R\, r = \bar{\varepsilon}\, R \tag{6.1}$$

miteinander verknüpft, wie man durch eine der früheren ähnliche Rechnung nachweist. Dabei ist ähnlich wie in (4.7) die Hilfsgröße $\bar{\varepsilon}$ jetzt durch

$$\bar{\varepsilon} = p\,\varepsilon_P + q\,\varepsilon_Q + r\,\varepsilon_R \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{\bar{\varepsilon}} = \frac{P}{\varepsilon_P} + \frac{Q}{\varepsilon_Q} + \frac{R}{\varepsilon_R} \tag{6.2}$$

erklärt. Diese Gleichungen lassen sich leicht auf mehr als drei Mischungsanteile verallgemeinern. Es tritt dann jeweils ein neuer gleich gebauter Summand hinzu. Die Reihenfolge der Stoffe (P), (Q) und (R) denken wir so gewählt, daß

$$p \leq q \leq r \tag{6.3}$$

ausfällt, was keine Einschränkung der Allgemeinheit unserer Untersuchung bedeutet.

Eine aus n Teilchen bestehende Probe, die für die Anteile (P), (Q) und (R) genau die Teilchenzahlen n_x, n_y und n_z besitzt, hat bekanntlich die Wahrscheinlichkeit

$$\Delta W(n_x, n_y, n_z; n) = \frac{n!}{n_x!\, n_y!\, n_z!}\, p^{n_x} q^{n_y} r^{n_z} \quad \text{mit} \quad n_x + n_y + n_z = n\,. \tag{6.4}$$

Durch (6.4) ist eine dreidimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilung im (n_x, n_y, n_z)-Raum gegeben, die jedoch wegen der Zusatzbedingung in (6.4) zu einer ebenen Verteilung entartet, und die allen im ersten Oktanten gelegenen Gitterpunkten der Ebene $n_x + n_y + n_z = n$ eine von 0 verschiedene Wahrscheinlichkeit zuordnet, wie es Abb. 11 anschaulich zeigt.

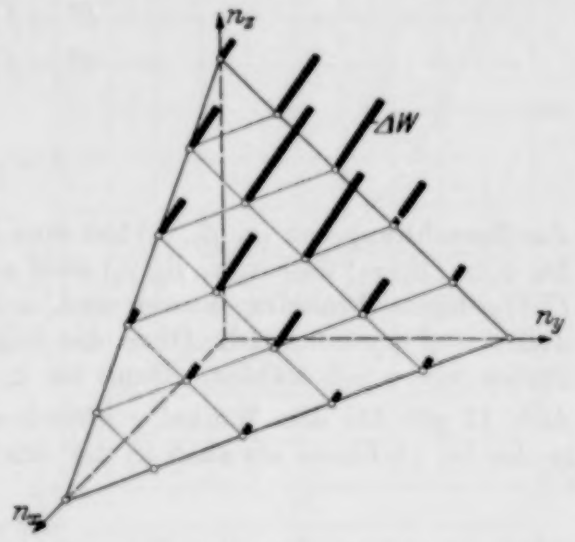


Abb. 11. Die „räumliche" Wahrscheinlichkeitsverteilung $\Delta W(n_x, n_y, n_z; n)$ für $p = 0{,}2$; $q = 0{,}3$; $r = 0{,}5$ und $n = 5$.

7. Die Ersatzverteilung für große Teilchenzahlen. Von praktischer Bedeutung ist nun die Tatsache, daß auch die hier auftretende trinomische Verteilung, die durch Entwicklung des Ausdrucks $(p+q+r)^n$ entsteht, für genügend große Teilchenzahl n der Stichprobe wieder durch eine Normalverteilung ersetzt werden darf. Zweckmäßig führen wir ebenso wie früher die Teilchenhäufigkeiten der Probe durch

$$x = \frac{n_x}{n}, \qquad y = \frac{n_y}{n}, \qquad z = \frac{n_z}{n} \tag{7.1}$$

mit

$$x + y + z = 1 \tag{7.2}$$

ein. Dann entsteht für genügend große Werte von n über der Ebene (7.2) des (x, y, z)-Raumes eine Normalverteilung mit dem Mittelwert $m(p, q, r)$ und der auf diesen Mittelwert bezogenen symmetrischen Streumatrix

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{S}(m) &\equiv \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_x \sigma_y \varrho_{xy} & \sigma_x \sigma_z \varrho_{xz} \\ \sigma_y \sigma_x \varrho_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_y \sigma_z \varrho_{yz} \\ \sigma_z \sigma_x \varrho_{zx} & \sigma_z \sigma_y \varrho_{zy} & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{n} \left(\begin{array}{cc:c} p(1-p) & -pq & -pr \\ -qp & q(1-q) & -qr \\ \hdashline -rp & -rq & r(1-r) \end{array}\right) = \frac{1}{n}\,\mathfrak{S}^*\,. \end{aligned}\right\} \tag{7.3}$$

wobei $\mathfrak{S}^*$ eine Matrix ist, deren Elemente nur von den Teilchenhäufigkeiten p, q, r abhängen. Auch hier zeigt man leicht, daß die Determinante der Matrix verschwindet, und daß die Matrix selbst den Rang 2 hat, denn die in der linken oberen Ecke stehende zweireihige Determinante hat wegen $p+q+r=1$ den Wert $pqr \neq 0$.

Zur weiteren Untersuchung stehen nun wieder die bereits im Abschnitt 2 genannten zwei Wege offen:

a) Entweder projizieren wir alle „Gitterpunkte" $G(x, y, z)$ der Ebene (7.2) in die ihnen entsprechenden Gitterpunkte $G'(x, y)$ der waagerechten (x, y)-Ebene und ordnen den Punkten G' die durch (6.4) gegebene Wahrscheinlichkeit ΔW zu. Dann geht aber die Symmetrie in den Veränderlichen p, q, r verloren. Zweckmäßiger ist deshalb die zweite Möglichkeit.

b) Wir bestimmen die der Streumatrix $\mathfrak{S}^*$ zugeordneten Hauptachsen durch Lösung der in λ kubischen Hauptachsengleichung ($\mathfrak{E}$ = Einheitsmatrix)

$$|\mathfrak{S}^* - \lambda \mathfrak{E}| = 0\,. \tag{7.4}$$

Da die Determinante $|\mathfrak{S}^*|$ der Matrix $\mathfrak{S}^*$ verschwindet, so sieht man, daß $\lambda = \lambda_0 = 0$ eine Lösung der Hauptachsengleichung ist. Zur Berechnung der beiden andern Lösungen findet man aus (7.4)

nach längerer Rechnung die quadratische Gleichung

$$\lambda^2 - 2(pq + qr + rp)\lambda + 3pqr = 0 \tag{7.5}$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1,2} = (pq + qr + rp) \pm \sqrt{(pq + qr + rp)^2 - 3pqr}\,. \tag{7.6}$$

Die dem Wert $\lambda_0 = 0$ zugeordneten Richtungswerte sind

$$\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,, \tag{7.7}$$

d. h. es sind die Richtungswerte des Normalenvektors der Stichprobenebene (7.2). Für die den beiden anderen Lösungen λ_1 und λ_2 zugeordneten Richtungswerte findet man

$$\left.\begin{aligned} \alpha^2 &= f[p(1-p)\lambda - 2pqr], \\ \beta^2 &= f[q(1-q)\lambda - 2pqr], \\ \gamma^2 &= f[r(1-r)\lambda - 2pqr], \end{aligned}\right\} \tag{7.8}$$

mit

$$f = \frac{1}{\lambda^2 - \lambda_1\lambda_2} = \frac{1}{\lambda^2 - 3pqr}\,. \tag{7.9}$$

Zur Berechnung von $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ hat man $\lambda = \lambda_1$ einzusetzen, und für $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ ist $\lambda = \lambda_2$ zu wählen. Da $\mathfrak{a}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ und $\mathfrak{a}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ zwei aufeinander senkrecht stehende, in der Stichprobenebene (7.2) gelegene Einheitsvektoren sind, so hat man die Vorzeichen von α, β und γ so zu bestimmen, daß $\alpha + \beta + \gamma = 0$ wird. Ohne die Allgemeingültigkeit unserer Untersuchung einzuschränken, dürfen wir $\gamma > 0$ wählen. Dann ist $\mathfrak{a}_1$ in der Stichprobenebene eindeutig festgelegt. Gemäß Abb. 12 gilt für den Winkel φ zwischen dem Einheitsvektor $\mathfrak{e}(-\sqrt{2}/2, +\sqrt{2}/2, 0)$, der sowohl in der (x, y)-Ebene als auch in der Stichprobenebene liegt, und $\mathfrak{a}_1$ die Beziehung

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\beta_1 - \alpha_1)\,. \tag{7.10}$$

8. Der Zufallsbereich $E(J, n)$ in der Stichprobenebene.

Die in der Stichprobenebene auf die Achsen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ bezogene Streumatrix wird

$$\frac{1}{n}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \tag{8.1}$$

Ihr ist die ebene Wahrscheinlichkeitsdichte mit dem Differential

$$\frac{n}{2\pi} e^{-\frac{n}{2}\left[\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2 + \left(\frac{v}{\sqrt{\lambda_2}}\right)^2\right]} d\left(\frac{u}{\sqrt{\lambda_1}}\right) d\left(\frac{v}{\sqrt{\lambda_2}}\right) \tag{8.2}$$

zugeordnet. Die Ellipse, welche die Hauptstreuungsmaße $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1/n}$ und $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2/n}$ zu Halbachsen hat, wollen wir die Hauptstreuungsellipse H nennen. Man bestätigt leicht, daß das Produkt der Hauptstreuungen den Wert

$$\sigma_1\sigma_2 = \sqrt{3pqr}/n$$

hat, daß also die Fläche $\pi\sigma_1\sigma_2$ der Ellipse H mit wachsender Teilchenzahl n der Probe wie $1/n$ gegen 0 strebt. Grenzt man also um m einen kleinen festen Bereich B ab, der m als inneren Punkt enthält, so fällt mit wachsendem n ein immer größerer Anteil von Stichproben in diesen Bereich hinein.

Durch die Substitution

$$\frac{u}{\sigma_1} = \xi \qquad \text{und} \qquad \frac{v}{\sigma_2} = \eta \tag{8.3}$$

wird die Hauptstreuungsellipse H der (u, v)-Ebene in den Einheitskreis $\xi^2 + \eta^2 = 1$ der (ξ, η)-Ebene überführt. Die in dieser Ebene einem beliebigen Kreis K vom Halbmesser ϱ zugeordnete Wahrscheinlichkeit ist (wie man leicht nachrechnet)

$$W(K) = 1 - e^{-\frac{1}{2}\varrho^2}\,. \tag{8.4}$$

Daraus erhält man für die im Abschnitt 3 erklärte Irrtumswahrscheinlichkeit den Wert

$$1 - W = J = e^{-\frac{1}{2}\varrho^2}. \tag{8.5}$$

Gibt man nun einen festen Wert W der Wahrscheinlichkeit bzw. $1 - W = J$ der Irrtumswahrscheinlichkeit vor, so läßt sich aus (8.5) der zugeordnete Halbmesser ϱ des Kreises K zu

$$\varrho(J) = \sqrt{-2 \ln J} \tag{8.6}$$

berechnen (Abb. 13). Je kleiner J vorgeschrieben wird, um so größer muß ϱ gewählt werden.

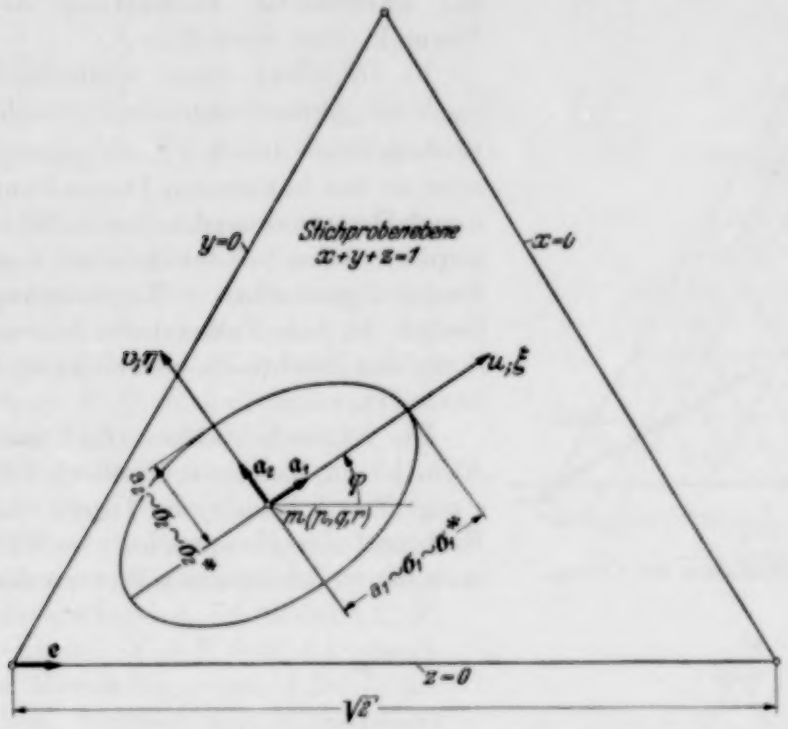


Abb. 12. Die Stichprobenebene mit den Hauptrichtungen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$.

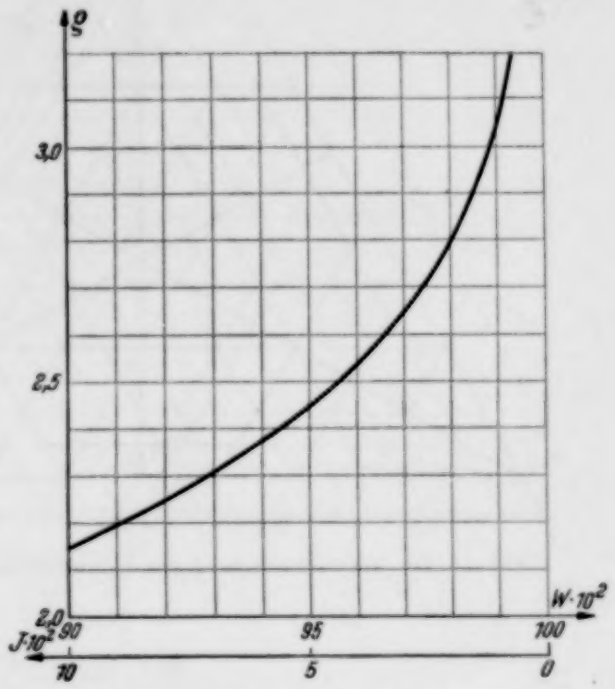


Abb. 13. Der Zusammenhang zwischen der Irrtumswahrscheinlichkeit J und dem Halbmesser ϱ eines Kreises, der $(W \cdot 100)\%$ der Beobachtungen enthält.

Dem Kreis $K(\varrho)$ der (ξ, η)-Ebene entspricht in der Stichprobenebene (7.2) eine Ellipse E mit dem Mittelpunkt $m(p, q, r)$ und den Halbachsen

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\lambda_1}\, \varrho \qquad \text{und} \qquad a_2 = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\lambda_2}\, \varrho \tag{8.7}$$

in Richtung der Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$. Im Innern dieser Ellipse E liegen bei der zugrundegelegten Irrtumswahrscheinlichkeit J bei „guter Durchmischung" der Stoffe $W \cdot 10^2\,(\%)$ aller Stichprobenpunkte (x, y, z). Der so festgelegte und durch eine Linie gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte begrenzte Bereich E ist bei festgehaltener Irrtumswahrscheinlichkeit $J = \text{konst.}$ der kleinste in der Stichprobenebene mögliche Bereich. Er umfaßt diejenigen Stichprobenpunkte (x, y, z), welche die größte Wahrscheinlichkeitsdichte besitzen. Allen Punkten außerhalb von E ist eine kleinere Wahrscheinlichkeitsdichte zugeordnet.

Kehren wir noch einmal zu den Gleichungen (8.7) zurück. Der erste Faktor $1/\sqrt{n}$ ist nur von der Teilchenzahl n der Stichprobe abhängig. Der zweite Faktor hängt nur von den Teilchenhäufigkeiten (p, q, r) ab und bleibt bei zyklischer Vertauschung von p, q, r ungeändert, da auch die Lösungen λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung (7.5) dabei fest bleiben. Der dritte Faktor ϱ wird nach (8.6) allein durch die zugrundegelegte Irrtumswahrscheinlichkeit $J = 1 - W$ bestimmt.

9. Die praktische Form der Lösung. Mit Hilfe der vorausgehenden Ergebnisse lassen sich die Bereiche E in der Stichprobenebene ein für allemal festlegen. Man setzt in (8.7) willkürlich $n = 1$ und $\varrho = 1$ und kann dann die für diesen Sonderfall entstehende Ellipse E^* mit den Halbachsen

$$\sigma_1^* = \sqrt{\lambda_1} \qquad \text{und} \qquad \sigma_2^* = \sqrt{\lambda_2} \tag{9.1}$$

in den Richtungen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ einzeichnen. Die einem beliebigen Wertepaar $(n; \varrho)$ zugeordnete Ellipse E findet man dann einfach durch eine Maßstabsänderung.

In diesem Zusammenhang sind zwei Bemerkungen nützlich.

a) Da es auf die Reihenfolge der Mischungskomponenten nicht ankommt, so sind die $3! = 6$ Permutationen der Elemente p, q, r einander gleichwertig. Es gehören also in dem Merkmaldreieck der Ebene $x + y + z = 1$ gemäß Abb. 14 je 6 Punkte zusammen, welche durch Spiegelung an den drei Mittelloten $p = q$, $q = r$, $r = p$ des Dreiecks auseinander hervorgehen. Man beherrscht also die ganze Verteilung, wenn man sie in einem der Teildreiecke, etwa in dem geschrafften, kennt, was für die numerische Auswertung der Formeln von Vorteil ist.

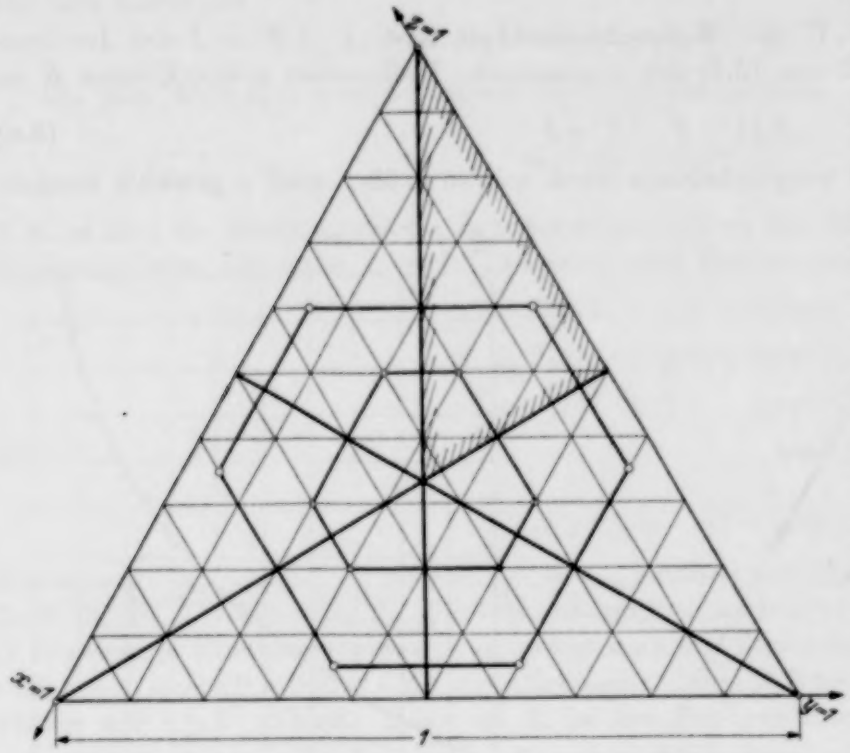


Abb. 14. Zur Veranschaulichung der Symmetrieeigenschaften der Lösung.

b) Dividiert man schließlich noch alle Abmessungen in der Stichprobenebene durch $\sqrt{2}$, so gelangt man zu der bekannten Darstellung durch Dreieckskoordinaten in Netzpapier, wie es bei der Analyse von Dreistoffgemischen Verwendung findet. In dem Falle ist die Seitenlänge des Stichprobendreiecks zu 1 normiert.

Die folgende Zahlentafel 1 und Abb. 15 enthalten schließlich für einige Werte (p, q, r) die Länge und Richtung der Hauptachsen[1]. Will man die zu bestimmten Werten der

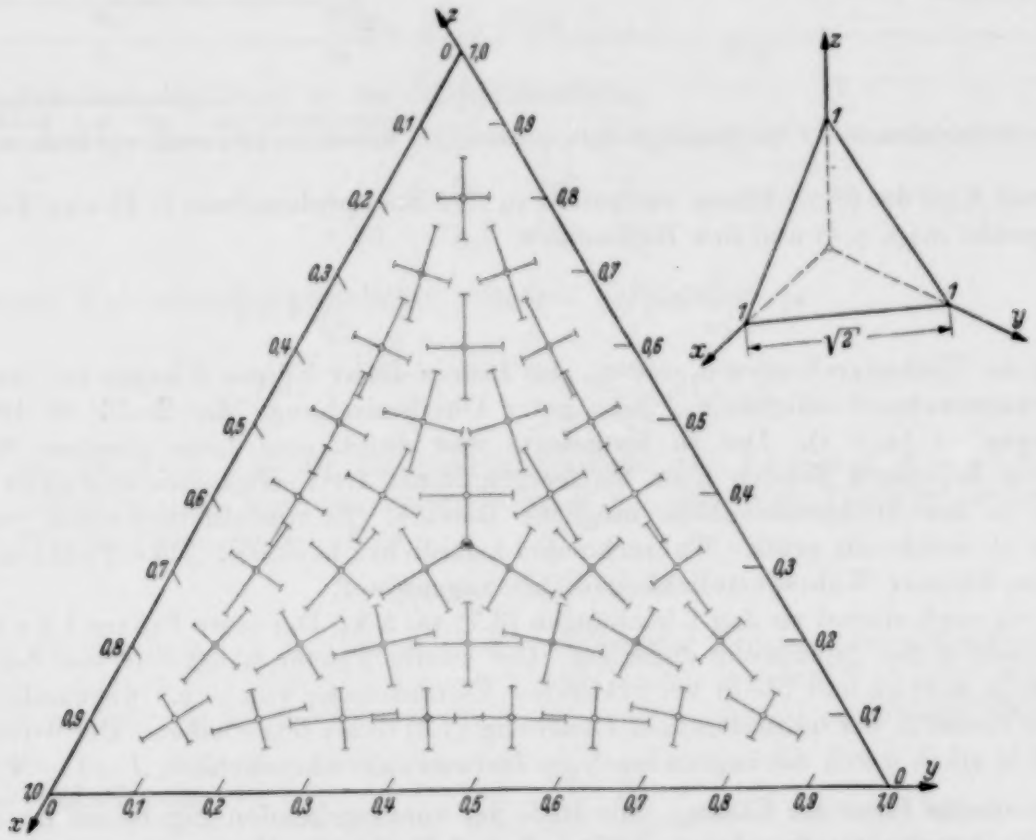


Abb. 15. Richtung und Länge der Hauptachsen der Streuungsellipsen im Stichprobendreieck der Ebene $x + y + z = 1$; (die Seitenlänge des Dreiecks ist auf den Wert 1 normiert).

Irrtumswahrscheinlichkeit J und der Teilchenzahl n gehörende Zufalls-Ellipse $E(J; n)$ in Dreieckspapier einzeichnen, so hat man wegen der eben genannten Normierung die Werte

[1] Für die gewissenhafte Durchführung der umfangreichen numerischen Rechnungen habe ich meiner Mitarbeiterin Fräulein Dipl.-Math. *E. Steinmetz* zu danken.

σ^* der Zahlentafel abweichend von (8.7) mit dem Faktor $\varrho(J)/\sqrt{2n}$ zu multiplizieren. Die mit Hilfe des Randmaßstabes aus Abb. 15 abgelesenen Längen der Halbachsen entsprechen, wenn man sie mit 10 multipliziert, den Werten σ^* der Tabelle 1.

Tabelle 1.

p	q	r	$\sigma_1^* = \sqrt{\lambda_1}$	$\sigma_2^* = \sqrt{\lambda_2}$	φ [°]
0,1	0,1	0,8	0,490	0,316	90,0
1	2	7	0,578	0,354	107,7
1	3	6	0,638	0,364	114,5
1	4	5	0,667	0,367	118,3
2	2	6	0,600	0,447	90,0
2	3	5	0,623	0,482	106,8
2	4	4	0,633	0,490	120,0
0,3	0,3	0,4	0,600	0,548	90,0

Die Ermittlung der notwendigen Teilchenzahl $n = \bar{n}$ für die Stichprobe $S(n)$ geht nun folgendermaßen vor sich. Zu den vorgeschriebenen Volumenhäufigkeiten P, Q, R und den zugelassenen Toleranzbereichen ΔP, ΔQ, ΔR berechnet man mit (6.1) und (6.2) die Teilchenhäufigkeiten p, q, r und die ihnen zugeordneten Toleranzbereiche Δp, Δq, Δr. Der Toleranzbereich sei in der (X, Y, Z)-Ebene $X + Y + Z = 1$ durch ein Parallelogramm $ABCD$ gegeben, welches den Mittelpunkt $M(P, Q, R)$ besitzt, und dessen Seiten durch die beiden (unabhängig voneinander wählbaren) Fehlergrenzen ΔP und ΔQ festgelegt sind. Die Seiten des Parallelogramms laufen zu zwei Grundrichtungen parallel (Abb. 16). Die vier Eckpunkte bildet man am einfachsten mit Hilfe der Gleichungen

$$\Delta p = \frac{1}{\varepsilon_P}(\bar{\varepsilon}\Delta P + P\Delta\bar{\varepsilon}) \qquad (9.2)$$

mit

$$-\Delta\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^2\left(\frac{\Delta P}{\varepsilon_P} + \frac{\Delta Q}{\varepsilon_Q} + \frac{\Delta R}{\varepsilon_R}\right)$$

auf die (x, y, z)-Ebene $x + y + z = 1$ ab. Entsprechende Formeln gelten für Δq und Δr. Bei dieser Umrechnung geht das Parallelogramm $ABCD$ wieder in ein Parallelogramm $abcd$ mit dem Mittelpunkt $m(p, q, r)$ der Stichprobenebene über. Seine Seiten laufen aber nicht mehr zu den Grundrichtungen parallel.

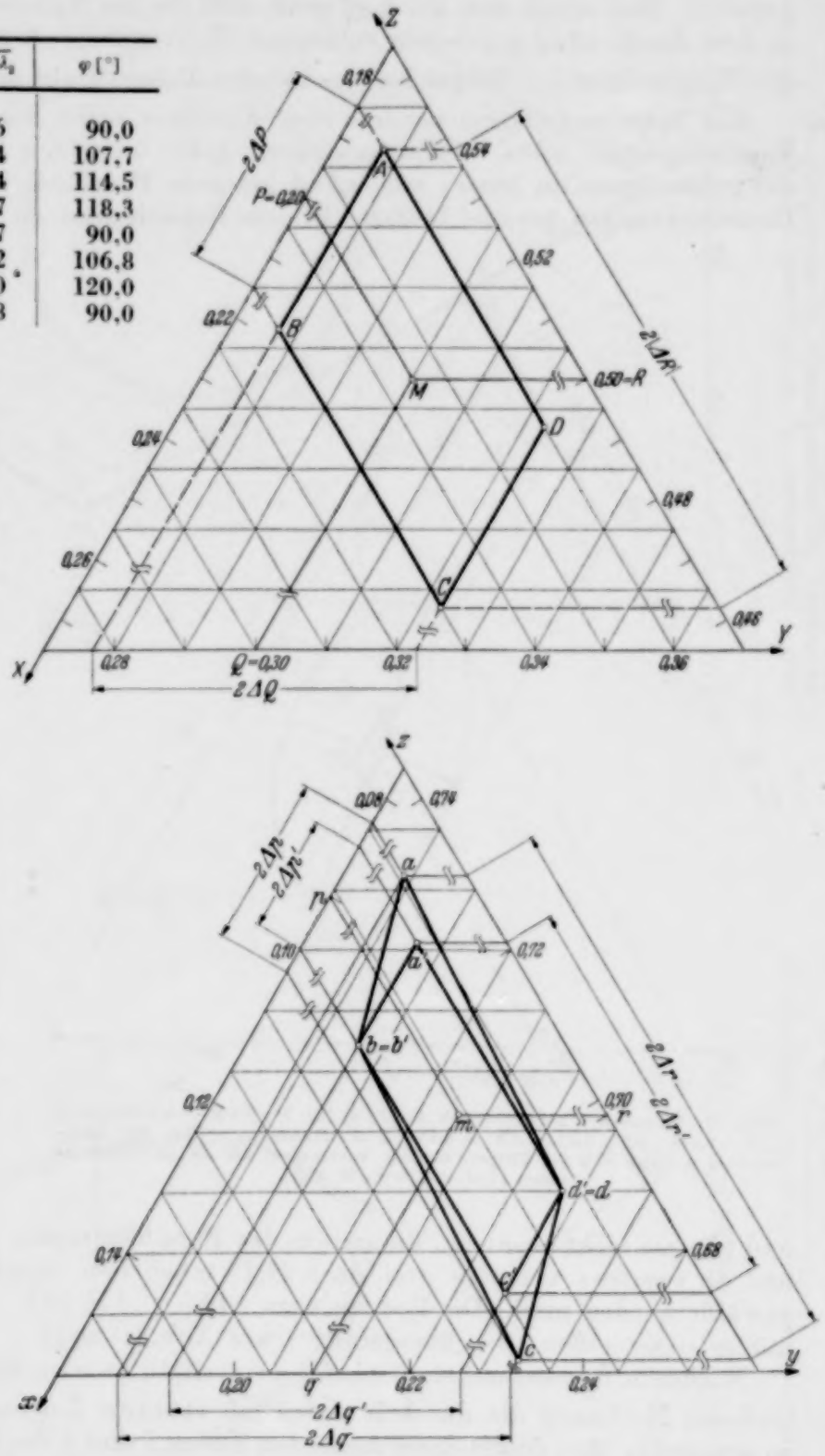


Abb. 16. Zur Berechnung der Toleranzbereiche *abcd* bzw. *a'b'c'd'* im Stichprobendreieck der (x, y, z)-Ebene.

Nun zeichnet man in dem Merkmaldreieck um den Punkt $m(p, q, r)$ für eine ganz beliebige Teilchenzahl n eine Streuungsellipse E mit den Halbachsen $\sigma_1^* \varrho/\sqrt{2n}$ und $\sigma_2^* \varrho/\sqrt{2n}$. Dieser Ellipse E sind Toleranzbereiche Δx, Δy, Δz zugeordnet, die man nach Abb. 17 anschaulich findet, indem man an E die zu den Linien $p =$ konst., $q =$ konst., $r =$ konst. parallelen Tangenten zeichnet.

Formelmäßig sind sie durch

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{p(1-p)}\, \varrho(J)\,, \qquad \Delta y = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{q(1-q)}\, \varrho(J) \qquad \Delta z = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{r(1-r)}\, \varrho(J) \tag{9.3}$$

gegeben. Man wählt nun $n = \bar{n}$ so groß, daß die der Teilchenzahl $\bar{n}$ zugeordnete Ellipse $\bar{E}$ ganz in dem durch $abcd$ gegebenen zulässigen Toleranzbereich liegt. Das ist stets möglich, da sich die Hauptachsen der Ellipse bei wachsender Teilchenzahl mit $1/\sqrt{n}$ zusammenziehen.

Ein bequemes (hinreichendes, aber durchaus nicht notwendiges) Verfahren, um $\bar{E}$ in das Parallelogramm $abcd$ hineinzuzwingen, geht folgenden Weg. Man bestimmt nach Abb. 16 das größte, ganz im Innern von $abcd$ gelegene Parallelogramm $a'b'c'd'$, dessen Seiten zu zwei Grundrichtungen parallel laufen. Diesem Bereich sind die Abweichungen $\Delta p' \leq \Delta p$, $\Delta q' \leq \Delta q$, $|\Delta r'| \leq |\Delta r|$ zugeordnet. Hält man nun die Bedingungen

$$|\Delta x| \leq \Delta p'\,, \qquad |\Delta y| \leq \Delta q'\,, \qquad |\Delta z| \leq |\Delta r'|$$

ein, so liegt die Ellipse $\bar{E}$ sicher im Bereich $abcd$. Die dazu notwendige Teilchenzahl $n = \bar{n}$ findet man gemäß (9.3) aus den drei Ungleichungen

$$\left.\begin{aligned} \bar{n} &\geq \frac{p(1-p)}{(\Delta p')^2}\, \varrho^2(J)\,, \\ \bar{n} &\geq \frac{q(1-q)}{(\Delta q')^2}\, \varrho^2(J)\,, \\ \bar{n} &\geq \frac{r(1-r)}{(\Delta r')^2}\, \varrho^2(J)\,, \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

indem man daraus den größten Wert für $\bar{n}$ auswählt. Das Volumen v der Probe ist dann $v = \bar{v} = \bar{n}\,\bar{\varepsilon}$.

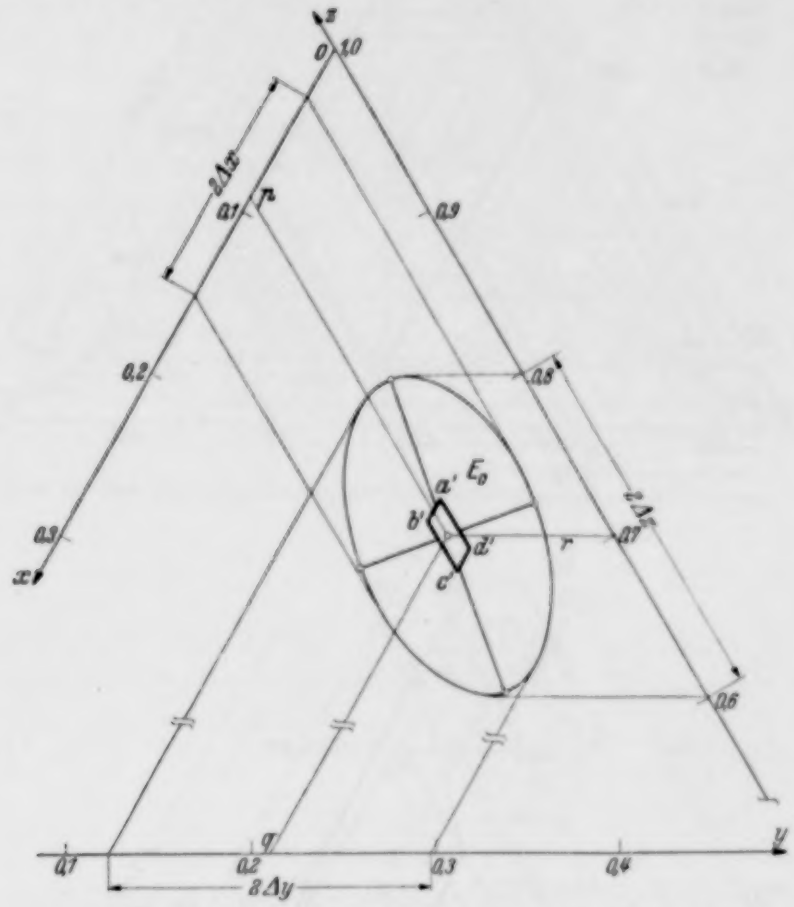


Abb. 17. Elliptischer Zufallsbereich $E_0(J; n)$ für $P:Q:R = 0{,}2:0{,}3:0{,}5$; $\Delta P = 0{,}015$; $\Delta Q = 0{,}023$; $|\Delta R| = 0{,}038$; $J = 0{,}01$ und $n_0 = 200$. Mit wachsendem n zieht sich die Ellipse ähnlich zusammen, bis sie im Parallelogramm $abcd$ bzw. $a'b'c'd'$ liegt.

Die Rechnung und die Abbildungen 18 und 19 zeigen, daß man auf dem beschriebenen Wege die zugelassenen Toleranzbereiche ΔP, ΔQ und $|\Delta R|$ für die Anteile (P), (Q) und (R) gar nicht ausnutzt, da erstens das Parallelogramm $a'b'c'd'$ ganz im Bereich $abcd$ liegt, und da zweitens von den drei nach (9.4) möglichen Anzahlen $\bar{n}_p$, $\bar{n}_q$ und $\bar{n}_r$ die größte ausgewählt werden muß. Die Bedingungen $|\Delta X| \leq \Delta P$, $|\Delta Y| \leq \Delta Q$ und $|\Delta Z| \leq |\Delta R|$ werden damit gewissermaßen alle „übererfüllt", wie Abb. 19 zeigt.

Im folgenden ist der Gang der Rechnung mit den wichtigsten Zahlenwerten für ein Beispiel zusammengestellt, wobei wir des Zusammenhanges wegen einige Ergebnisse des nächsten Abschnitts vorwegnehmen.

Nachdem $\bar{n}$ bekannt ist, erscheint es deshalb zweckmäßig, zu $\bar{n}$ und $(p; q; r)$ durch zurücklaufende Rechnung die durch $\bar{n}$ gewährleisteten Toleranzen $(\overline{\Delta p}, \overline{\Delta q}, \overline{\Delta r})$ und $(\overline{\Delta P}, \overline{\Delta Q}, \overline{\Delta R})$ zu ermitteln. Man findet dann die in den Zeilen 5 und 6 des Beispiels zusammengestellten Werte, wobei wegen $\bar{n} = \bar{n}_p$ hier natürlich $\overline{\Delta p} = \Delta p'$ sein muß. Daß die Summen $\overline{\Delta p} + \overline{\Delta q} - |\overline{\Delta r}|$ und $\overline{\Delta P} + \overline{\Delta Q} - |\overline{\Delta R}|$ nicht verschwinden, liegt daran, daß im elliptischen Zufallsbereich die äußersten Werte $\overline{\Delta p}$ und $\overline{\Delta q}$ bzw. $\overline{\Delta P}$ und $\overline{\Delta Q}$ gar nicht gemeinsam auftreten. Infolgedessen ist sowohl $|\overline{\Delta r}| < \overline{\Delta p} + \overline{\Delta q}$, als auch $|\overline{\Delta R}| < \overline{\Delta P} + \overline{\Delta Q}$.

10. Stichproben $S(v)$ gleichen Volumens. Die vorausgehenden Betrachtungen gelten für Stichproben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl. Wir wollen ähnlich wie im Abschnitt **5** abschätzen, wie groß der Unterschied $\Delta n = n - \bar{n}$ der Teilchenzahl ausfällt, wenn wir Stichproben $S(v)$ gleichen Volumens $v = \bar{v}$ entnehmen.

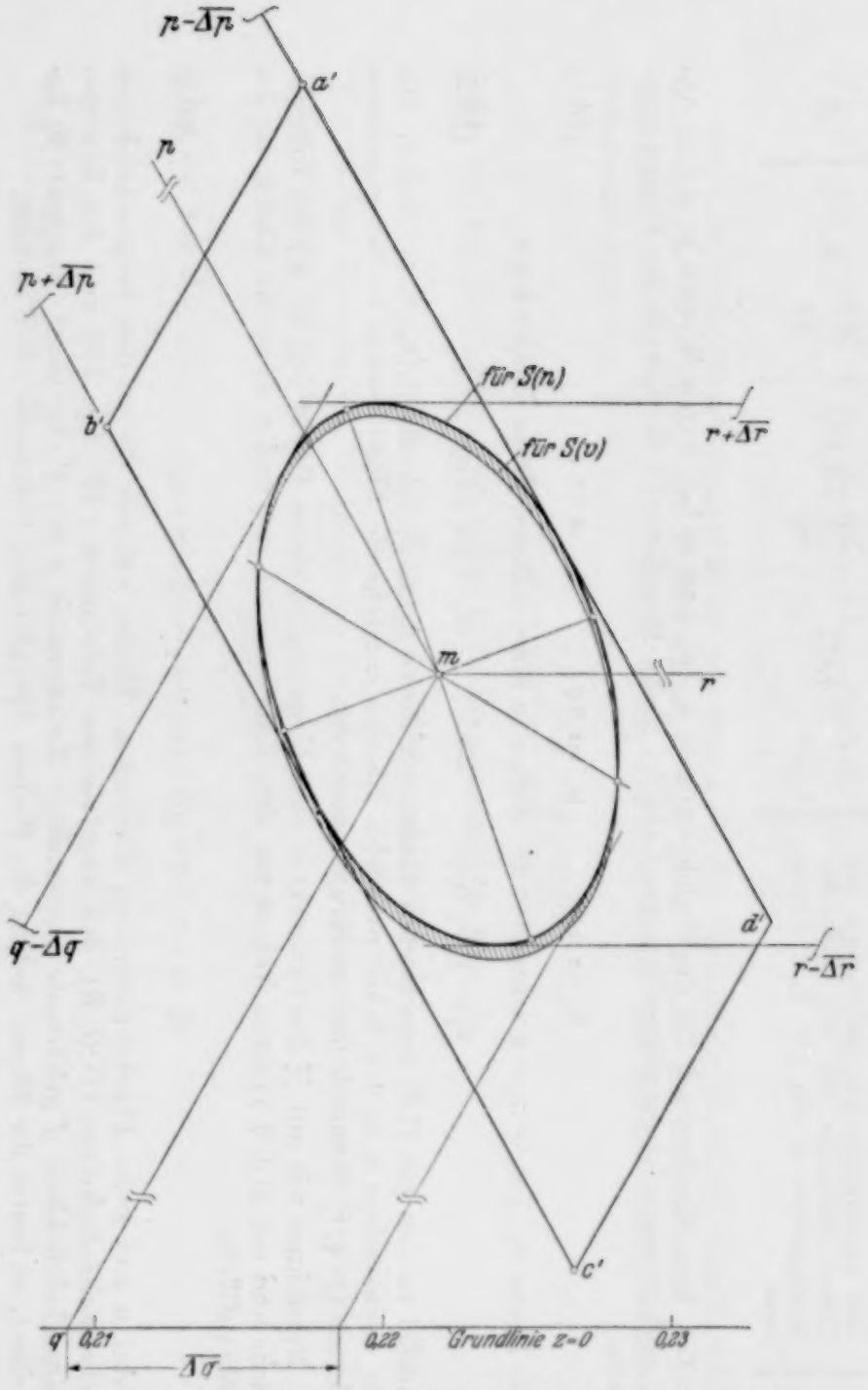


Abb. 18. Die Zufallsbereiche für Stichproben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl und Stichproben $S(v)$ gleichen Volumens im Stichprobendreieck x, y, z für ein Zahlenbeispiel. Die geschrafften Abweichungen sind zehnfach überhöht dargestellt. Die Bereiche stimmen also praktisch vollkommen überein.

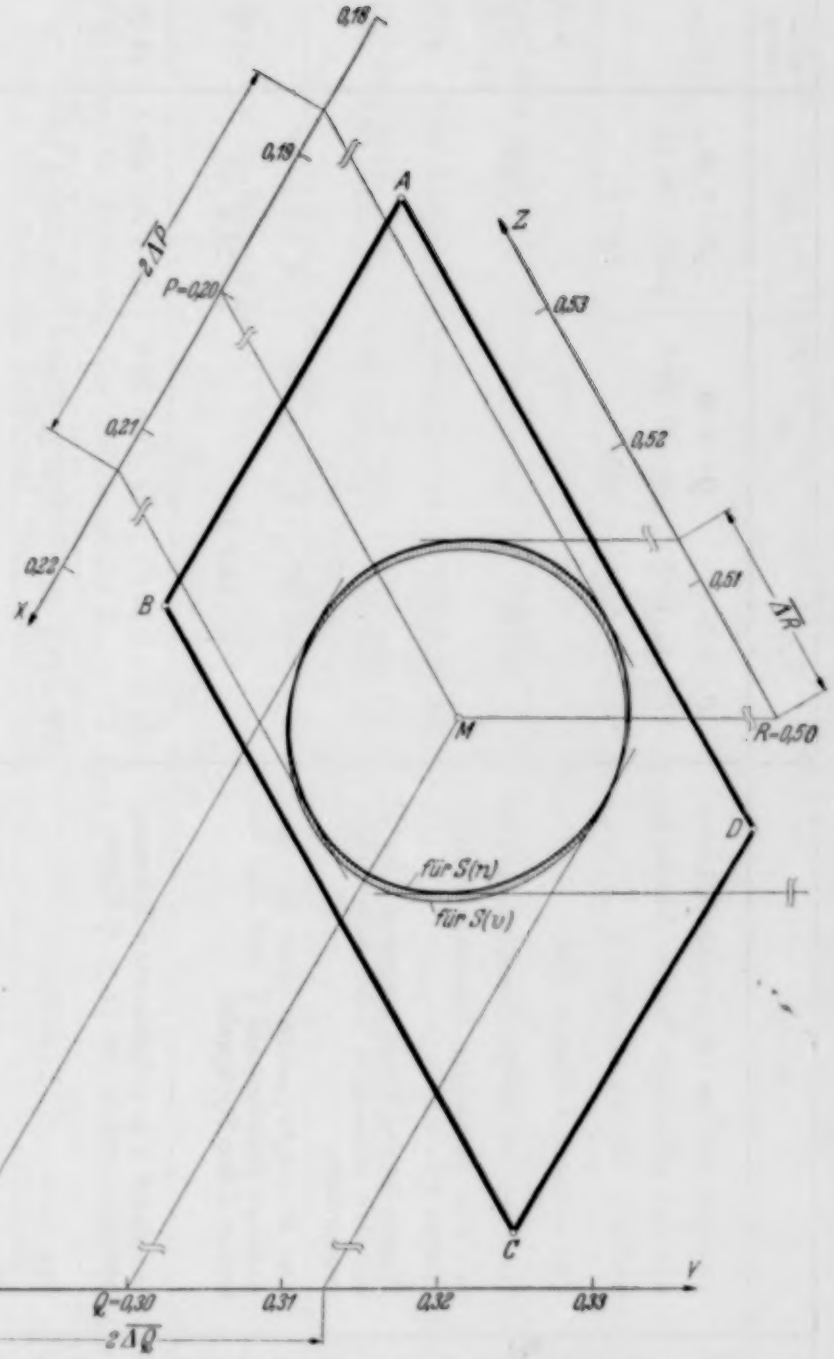


Abb. 19. Die Zufallsbereiche für Stichproben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl und Stichproben $S(v)$ gleichen Volumens im Stichprobendreieck X, Y, Z für ein Zahlenbeispiel. Die geschrafften Abweichungen sind zehnfach überhöht dargestellt. Die Bereiche stimmen also praktisch vollkommen überein.

Tabelle 2. (Z bedeutet Zeichnung.)

	Beispiel	(P)	(Q)	(R)	Gleichung
1	Gegeben sind die Volumenhäufigkeiten	$P=0{,}20$	$Q=0{,}30$	$R=0{,}50$	
	mit den zulässigen Toleranzbereichen	$\Delta P=15\cdot10^{-3}$	$\Delta Q=23\cdot10^{-3}$	$\lvert\Delta R\rvert=38\cdot10^{-3}$	
	und den Elementarvolumen	$\varepsilon_P=3$	$\varepsilon_Q=2$	$\varepsilon_R=1$	
2	Das mittlere Volumen wird	$\bar{\varepsilon}=1{,}395$			(6.2)
3	Dazu gehören die Teilchenhäufigkeiten	$p=0{,}093$	$q=0{,}209$	$r=0{,}698$	(6.1)
	mit dem zulässigen Toleranzparallelogramm $a\,b\,c\,d$	$\Delta p=9{,}8\cdot10^{-3}$	$\Delta q=22{,}3\cdot10^{-3}$	$\lvert\Delta r\rvert=32{,}1\cdot10^{-3}$	(9.2)
	Diesem ist das Parallelogramm $a'b'c'd'$ mit den zulässigen Toleranzbereichen zugeordnet.	$\Delta p'=6{,}8\cdot10^{-3}$	$\Delta q'=16{,}5\cdot10^{-3}$	$\lvert\Delta r'\rvert=23{,}3\cdot10^{-3}$	Z
4	Für $W=0{,}99$ erhält man die notwendige Teilchenzahl $\bar{n}$ und das Volumen $\bar{v}$ der Stichprobe	$\bar{n}_p=16{,}8\cdot10^3$	$\bar{n}_q=5{,}6\cdot10^3$	$\bar{n}_r=3{,}6\cdot10^3$	
		$\bar{n}=16{,}8\cdot10^3$		$\bar{v}=23{,}4\cdot10^3$	(9.4)
5	Die durch $\bar{n}$ gewährleisteten Toleranzbereiche sind in der (x, y, z)-Ebene	$\overline{\Delta p}=6{,}8\cdot10^{-3}$	$\overline{\Delta q}=9{,}6\cdot10^{-3}$	$\overline{\Delta r}=10{,}7\cdot10^{-3}$	(9.4)
6	bzw. in der (X, Y, Z)-Ebene	$\overline{\Delta P}=13{,}1\cdot10^{-3}$	$\overline{\Delta Q}=12{,}5\cdot10^{-3}$	$\overline{\Delta R}=12{,}9\cdot10^{-3}$	Z
7	Mit ε_{max} wird die größte Schwankung der Teilchenzahl $(\Delta n/\bar{n})_{max}$ in Proben $S(v)$ gleichen Volumens $v=\bar{v}$	$\varepsilon_{max}=0{,}652$			(10.11)
		$(\Delta n/\bar{n})_{max}=1{,}1\cdot10^{-3}$			(10.12)
8	Dadurch ändern sich die Toleranzbereiche für die aus Proben $S(v)$ berechneten Teilchenhäufigkeiten (x, y, z) um höchstens	$\frac{\overline{\Delta^2 p}}{\overline{\Delta p}}=0{,}5\%$	$\frac{\overline{\Delta^2 q}}{\overline{\Delta q}}=0{,}5\%$	$\frac{\overline{\Delta^2 r}}{\overline{\Delta r}}=0{,}6\%$	(10.15)
9	Die entsprechenden Änderungen der Toleranzbereiche für die Volumenhäufigkeiten in der (X, Y, Z)-Ebene sind	$\frac{\overline{\Delta^2 P}}{\overline{\Delta P}}=0{,}4\%$	$\frac{\overline{\Delta^2 Q}}{\overline{\Delta Q}}=0{,}3\%$	$\frac{\overline{\Delta^2 R}}{\overline{\Delta R}}=0{,}6\%$	Z

Der Konfidenzbereich für die Teilchenzahlen n_x, n_y und n_z bei festen Werten p, q, r in Abhängigkeit von n ist ein röhrenförmiges Gebilde. Seine Mittellinie ist die Gerade der Erwartungswerte

$$n_x = np\,, \qquad n_y = nq\,, \qquad n_z = nr\,. \tag{10.1}$$

Die Ebene $n_x + n_y + n_z = n$ schneidet die Röhre in einer Ellipse, deren Halbachsen

$$a_1' = \sqrt{n}\,\sqrt{\lambda_1}\,\varrho \qquad \text{und} \qquad a_2' = \sqrt{n}\,\sqrt{\lambda_2}\,\varrho \tag{10.2}$$

parallel zu den aus (7.8) berechneten Einheitsvektoren $\mathfrak{a}_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ und $\mathfrak{a}_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ liegen. Die mit wachsendem n in der Schar paralleler Ebenen entstehende Ellipsenschar ist bei gegebenen Werten (p, q, r) demnach fest im Raume orientiert.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}$ den Ortsvektor vom Ursprung zu einem Punkt (n_x, n_y, n_z) der Röhrenfläche und mit $\mathfrak{c}(p, q, r)$ einen Vektor mit den Komponenten p, q und r, so ist die Gleichung der Röhrenfläche

$$\mathfrak{R} = n\,\mathfrak{c} + \sqrt{n}\,\varrho(\sigma_1^* \cos\psi\,\mathfrak{a}_1 + \sigma_2^* \sin\psi\,\mathfrak{a}_2)\,, \tag{10.3}$$

wobei n und ψ die Flächenparameter darstellen. Haben wir nun die zu den vorgeschriebenen Volumenhäufigkeiten (P, Q, R), den zugelassenen Toleranzen $(\Delta P, \Delta Q, \Delta R)$ und der Irrtumswahrscheinlichkeit J gehörende notwendige Teilchenzahl $\bar{n}$ der Probe (nach Abschnitt 9) berechnet, so lautet die Ebene, welche die Proben $S(v)$ gleichen Volumens $v=\bar{v}$ enthält,

$$n_x\varepsilon_P + n_y\varepsilon_Q + n_z\varepsilon_R = \bar{v} = \bar{n}\,\bar{\varepsilon}\,. \tag{10.4}$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß ein Wertetripel (n_x, n_y, n_z), welches der Röhrenfläche (10.3) und der Ebene (10.4) gleichzeitig angehört, der Gleichung

$$n\,\bar{\varepsilon} + \varrho\sqrt{n}\,(A\varepsilon_P + B\varepsilon_Q + C\varepsilon_R) = \bar{n}\,\bar{\varepsilon} \tag{10.5}$$

genügt, wobei

$$\left.\begin{aligned} A(\psi) &= \sigma_1^* \alpha_1 \cos\psi + \sigma_2^* \alpha_2 \sin\psi\,, \\ B(\psi) &= \sigma_1^* \beta_1 \cos\psi + \sigma_2^* \beta_2 \sin\psi\,, \\ C(\psi) &= \sigma_1^* \gamma_1 \cos\psi + \sigma_2^* \gamma_2 \sin\psi \end{aligned}\right| \tag{10.6}$$

ist. Für später bemerken wir, daß die größten Werte von A, B und C gemäß (7.6) und (7.8) durch

$$A_{max} = \sqrt{p(1-p)}\,, \qquad B_{max} = \sqrt{q(1-q)}\,, \qquad C_{max} = \sqrt{r(1-r)} \tag{10.7}$$

gegeben sind. Mit $\Delta n = n - \bar{n}$ erhält man aus (10.5) als Bestimmungsgleichung für Δn

$$\Delta n + \frac{A\varepsilon_P + B\varepsilon_Q + C\varepsilon_R}{\bar{\varepsilon}}\,\varrho\sqrt{\bar{n}}\,\sqrt{1 + \frac{\Delta n}{\bar{n}}} = 0\,. \tag{10.8}$$

In erster Näherung ist

$$\frac{\Delta n}{\bar{n}} \approx -\frac{A\varepsilon_P + B\varepsilon_Q + C\varepsilon_R}{\bar{\varepsilon}}\,\varrho(J)\,\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}\,. \tag{10.9}$$

Die relative Änderung der Teilchenzahl beim Übergang von Proben $S(n)$ fester Teilchenzahl $n = \bar{n}$ zu Proben $S(v)$ festen Volumens $v = \bar{v}$ ist von der Größenordnung $1/\sqrt{\bar{n}}$.

Die größte mögliche Änderung Δn_{max} erhält man, wenn man in (10.9) den Ausdruck

$$\varepsilon(\psi) = A\varepsilon_P + B\varepsilon_Q + C\varepsilon_R$$

gemäß (10.6) als Funktion von ψ betrachtet. Aus

$$\varepsilon(\psi) = \sigma_1^*(\alpha_1\varepsilon_P + \beta_1\varepsilon_Q + \gamma_1\varepsilon_R)\cos\psi + \sigma_2^*(\alpha_2\varepsilon_P + \beta_2\varepsilon_Q + \gamma_2\varepsilon_R)\sin\psi \tag{10.10}$$

findet man mit (7.6) und (7.8) nach längerer Rechnung

$$\varepsilon_{max}^2 = \varepsilon_P^2\,p(1-p) + \varepsilon_Q^2\,q(1-q) + \varepsilon_R^2\,r(1-r) - 2(\varepsilon_P\varepsilon_Q\,pq + \varepsilon_Q\varepsilon_R\,qr + \varepsilon_R\varepsilon_P\,rp)\,. \tag{10.11}$$

Damit gilt schließlich für die gesuchte relative Schwankung der Teilchenzahlen

$$\left(\frac{\Delta n}{\bar{n}}\right)_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{\bar{\varepsilon}}\,\varrho(J)\,\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}\,. \tag{10.12}$$

Mit Hilfe dieses Ergebnisses sind wir nun imstande, den Einfluß der veränderlichen Teilchenzahl bei der Berechnung der Teilchenhäufigkeiten abzuschätzen. Bei Proben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl $n = \bar{n}$ gilt in der Ebene $n = \bar{n}$ auf dem Rande des Konfidenzbereichs für die Teilchenhäufigkeiten, z. B. für x,

$$x = \frac{n_x}{\bar{n}} = \frac{\bar{n}\,p + \sqrt{\bar{n}}\,\varrho\,A(\psi)}{\bar{n}}\,,$$

oder für den Unterschied gegenüber dem Erwartungswert p,

$$(x-p)_{n=\bar{n}} = (\Delta x)_{n=\bar{n}} = \varrho\,A(\psi)\,\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}\,. \tag{10.13}$$

Für Proben $S(v)$ gleichen Volumens $v = \bar{v}$ hat man in der Ebene $v = \bar{v}$ auf dem Rande des Konfidenzbereichs entsprechend

$$x = \frac{n_x}{n} = \frac{np + \sqrt{n}\,\varrho\,A(\psi)}{n}\,,$$

also mit $n = \bar{n} + \Delta n$,

$$(x-p)_{v=\bar{v}} = (\Delta x)_{v=\bar{v}} = \varrho\,A(\psi)\,\frac{1}{\sqrt{\bar{n}}}\,\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta n}{\bar{n}}}}\,.$$

Mit (10.13) wird daraus

$$(\Delta x)_{v=\bar{v}} \approx (\Delta x)_{n=\bar{n}}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta n}{\bar{n}}\right). \tag{10.14}$$

Verwendet man also an Stelle der eigentlich notwendigen Proben gleicher Teilchenzahl solche gleichen Volumens, so wird der größte mögliche Unterschied für die aus diesen Proben berechneten Teilchenhäufigkeiten mit (10.7), (10.12) und (10.13) dem Betrage nach

$$\left|(\Delta x)_{v=\bar{v}} - (\Delta x)_{n=\bar{n}}\right| \approx \frac{1}{2}\varrho^2\sqrt{p(1-p)}\,\frac{\varepsilon_{max}}{\bar{\varepsilon}}\,\frac{1}{\bar{n}} = \frac{\varepsilon_{max}}{2\bar{\varepsilon}}\,\frac{1}{\sqrt{p(1-p)}}\,(\Delta p)^2. \tag{10.15}$$

Entsprechende Gleichungen gelten für Δy und Δz. Man hat nur p durch q bzw. r zu ersetzen. Der Übergang zu Proben $S(v)$ ist demnach erlaubt. Sie liefern in erster Näherung die gleichen Konfidenzbereiche für die Teilchenhäufigkeiten x, y, z wie Proben gleicher Teilchenzahl.

Es ist nützlich, aus (10.15) den Sonderfall von nur zwei Komponenten (P) und (Q) in der Mischung herzuleiten. Aus (10.11) folgt mit $r=0$ zunächst

$$\varepsilon_{max}^3 = (\varepsilon_P - \varepsilon_Q)^2 p q\,.$$

Aus (10.15) erhält man damit

$$\left|(\Delta x)_{v=\bar{v}} - (\Delta x)_{n=\bar{n}}\right| \approx \frac{|\varepsilon_P - \varepsilon_Q|}{2\bar{\varepsilon}}\,\varrho^2\,p q\,\frac{1}{\bar{n}} = \frac{|\varepsilon_P - \varepsilon_Q|}{2\bar{\varepsilon}}\,(\Delta p)^2\,.$$

Das stimmt mit (5.8) überein, wenn man berücksichtigt, daß dort $x' - p = (\Delta x)_{v=\bar{v}}$ darstellt und daß Δp damals durch (2.6) mit ϱ und ^{n} verknüpft war. Damit ist der Zusammenhang mit den früheren Ergebnissen hergestellt.

11. Schlußbemerkungen; Zusammenfassung. Die vorausgehenden Untersuchungen wurden mit Hilfe der Begriffe „Volumenhäufigkeit" P, Q, R und „Teilchenhäufigkeit" p, q, r entwickelt. Der Gedankengang bestand im wesentlichen aus drei Schritten. Die Volumenhäufigkeiten P, Q, R wurden in Teilchenhäufigkeiten p, q, r umgerechnet. Für p, q, r bzw. die Einzelteilchen wird bei der Entstehung der Mischung die Gültigkeit statistischer Gesetzmäßigkeiten vorausgesetzt. Die Ergebnisse gelten dann zunächst nur für Stichproben $S(n)$ gleicher Teilchenzahl. Schließlich wird gezeigt, daß die Ergebnisse der Teilchen-Theorie cum grano salis auch für Stichproben $S(v)$ gleichen Volumens Gültigkeit besitzen. Es wurde versucht, die wichtigsten Ergebnisse in einer Form darzustellen, die wohl ohne wesentliche Änderungen auch praktischen Bedürfnissen gerecht wird, wenn sich herausstellt, daß die Theorie zur Beschreibung und Beurteilung wirklicher Mischvorgänge brauchbar ist. Ein ganz anderes, hier nicht berührtes Problem besteht darin, wie man aus einer Stichprobe mit den Teilchenhäufigkeiten x, y, z bei unbekannten Anteilen P, Q, R der Gesamtmischung einen Rückschluß von x, y, z über X, Y, Z auf diese unbekannten Häufigkeiten machen kann.

Selbstverständlich bleiben alle Gedankengänge völlig ungeändert, wenn man an Stelle von P, Q, R die relativen „Gewichtshäufigkeiten" P_μ, Q_μ, R_μ mit $P_\mu + Q_\mu + R_\mu = 1$ zugrundelegt. Die Elementarvolumen $\varepsilon_P, \varepsilon_Q, \varepsilon_R$ sind dann durch die Elementargewichte μ_P, μ_Q, μ_R der Einzelteilchen zu ersetzen. Es bietet keine Schwierigkeiten, diese Gewichtshäufigkeiten mit den Teilchenhäufigkeiten und den Volumenhäufigkeiten zu verknüpfen. In manchen Fällen scheint eine Kennzeichnung der Mischung durch Gewichtsanteile sogar sinnvoller zu sein.

Für kleine Werte der Teilchenzahl n verlieren die Ergebnisse ihren Sinn, weil der Ersatz der diskreten Multinomialverteilung durch eine Normalverteilung unzulässig wird, und weil sich die statistischen Gesetzmäßigkeiten erst bei großen Teilchenzahlen auswirken können. Diese Gefahr der zu geringen Anzahl wird aber bei praktisch vorkommenden Mischungen wohl kaum bestehen.

Der Einfluß des zwischen den Einzelteilchen bestehenden leeren Volumens ist nicht berücksichtigt worden. Da dieser Einfluß nicht nur von den Korngrößen $\varepsilon_P, \varepsilon_Q, \varepsilon_R$, sondern hauptsächlich von der Gestalt der Körner abhängt, wird man zu Korrekturwerten Zuflucht nehmen müssen, die man wohl nur durch einen Versuch im konkreten Falle bestimmen kann.

Es ist schließlich selbstverständlich, daß die Überlegungen auf Vierstoffgemische und noch weiter verallgemeinert werden können. Gedanklich ist dann im Vergleich zu der vorausgehenden Entwicklung nur wenig Mehrarbeit zu leisten, während der mathematische Aufwand natürlich rasch anwächst und man für fünf und mehr Mischungskomponenten nicht mehr die Möglichkeit einer anschaulichen Darstellung hat. Der Fall von vier Komponenten P, Q, R, T liegt in dieser Hinsicht gerade an der Grenze. Dadurch, daß man den vierdimensionalen (X, Y, Z, T)-Raum (bzw. den x, y, z, t-Raum) durch die „Ebene" $X + Y + Z + T = 1$ (bzw. $x + y + z + t = 1$) schneidet, entsteht bei geeigneter orthogonaler Substitution und passender Normierung ein dreidimensionales regelmäßiges Tetraeder der Seitenlänge 1. Dieses Stichprobentetraeder ent-

spricht dem Stichprobendreieck aus Abbildung 14. Die Punkte M (bzw. m) im Innern dieses Tetraeders bilden die Gesamtheit der möglichen Häufigkeitskombinationen X, Y, Z, T bzw. x, y, z, t. Mit Hilfe von Tetraederkoordinaten läßt sich dann für vier Mischungskomponenten eine ähnliche Darstellung erzielen wie bei einer Dreikomponentenmischung im Dreiecknetz der Abbildung 14.

Wenn die Mischung auf dem in Abbildung 1 dargestellten Wege entsteht, gibt die Theorie ein gutes Abbild der Wirklichkeit, wie das folgende Beispiel zeigt. Es wurde eine aus $N = 4 \cdot 10^4$ Teilchen bestehende Mischung aus zwei Komponenten hergestellt. Als Zufallsvorgang

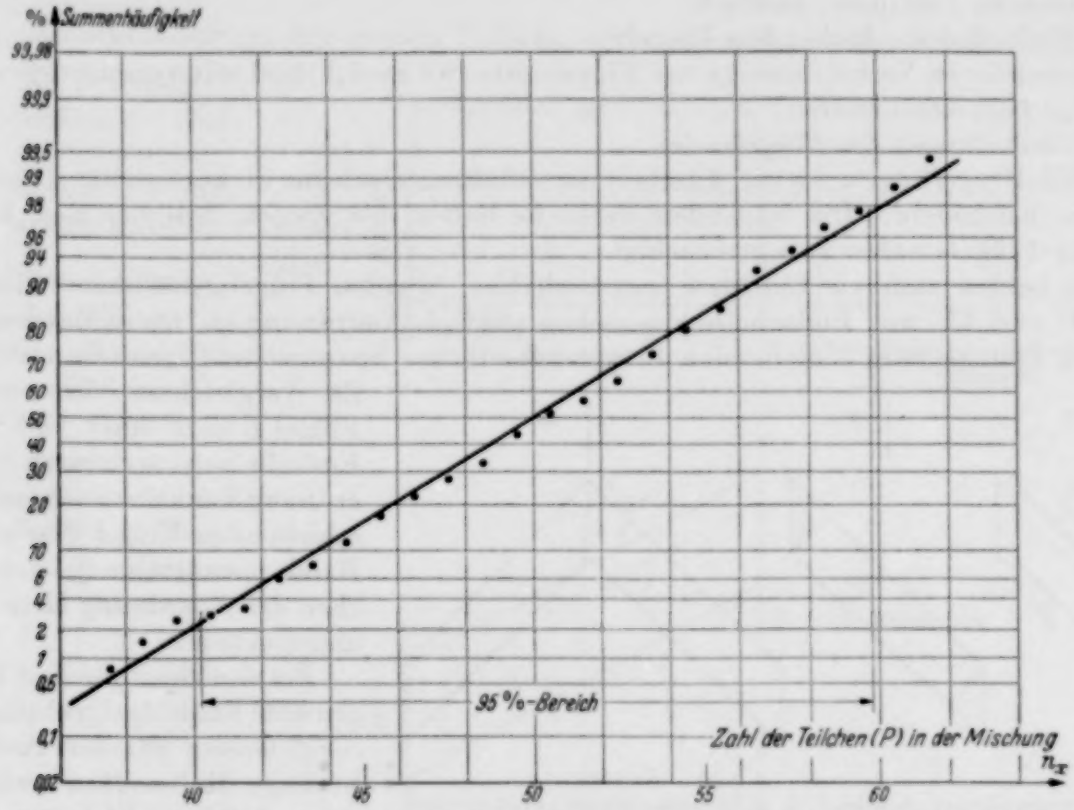


Abb. 20. Verteilung von 400 Stichproben aus einer Zufallsmischung mit $N = 4 \cdot 10^4$ Teilchen im Wahrscheinlichkeitsnetz nach Rechnung (Gerade) und Versuch (Einzelpunkte) für $p = q = 0{,}5$ und $n = 100$.

dienten die Ergebnisse des Roulettespieles der Spielbank in Baden-Baden, indem man die Teilchenhäufigkeiten p und q mit den Wahrscheinlichkeiten für „rot" und „schwarz" gleichsetzte. Die Mischung wurde in 400 Stichproben $S(n)$ von je $n = 100$ Teilchen zerlegt. Die Stichproben wurden dann auf ihre Zusammensetzung untersucht. Das Ergebnis dieses Versuchs im Vergleich zu dem nach der Theorie zu erwartenden Verlauf zeigt Abbildung 20. Natürlich ist die gute Übereinstimmung noch kein Beweis dafür, daß das mathematische Modell auch die wesentlichen Züge einer Mischung wiedergibt, die auf ganz andere Weise in einem Mischgerät erzeugt wurde. Die Nachprüfung, wieweit die entwickelte Theorie bei praktisch auftretenden Mischungsvorgängen ein den Tatsachen entsprechendes Bild liefert, soll weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

(Eingegangen am 1. Juni 1952.)

Anschrift des Verfassers: *Dr. K. Stange*, Karlsruhe, Technische Hochschule, Institut für Mathematik und ihre techn. Anwendungen.

Experimentelle Untersuchungen am schiebenden Flügel*

Von W. Jacobs.

1. Einleitung. Bei allen bisherigen Messungen an Pfeilflügeln überdecken sich grundsätzlich drei verschiedene Einflüsse, nämlich

1. der Einfluß des schiebenden Flügels,
2. die besonderen Verhältnisse in der Flügelmitte, wo zwei Flügel mit verschiedenem Schiebewinkel zusammentreffen,
3. die Umströmung der Flügelenden.

Um über Pfeilflügelfragen weiter Klarheit zu erhalten, erscheint es notwendig, diese Einflüsse getrennt zu behandeln. Die folgenden Versuche haben den Zweck, lediglich den Einfluß des schiebenden Flügels näher zu untersuchen.

Um die beiden anderen Einflüsse auszuschalten, wurden Flügel, mit den Schiebewinkeln $\beta = 0°$, $30°$ und $45°$ mit Endscheiben versehen (Abb. 1, Anordnung I). Diese Messungen bilden somit einen Beitrag zum schiebenden Flügel unendlicher Spannweite („quasiebenes" Problem). Zu Vergleichszwecken wurden die Flügel $\beta = 0°$ und $45°$ auch ohne Endscheiben vermessen. Diese Anordnung kann dazu dienen, bei einem schiebenden Flügel den Einfluß der Randumströmung (gestrichelte Flächen der Anordnung II in Abb. 1) zu untersuchen.

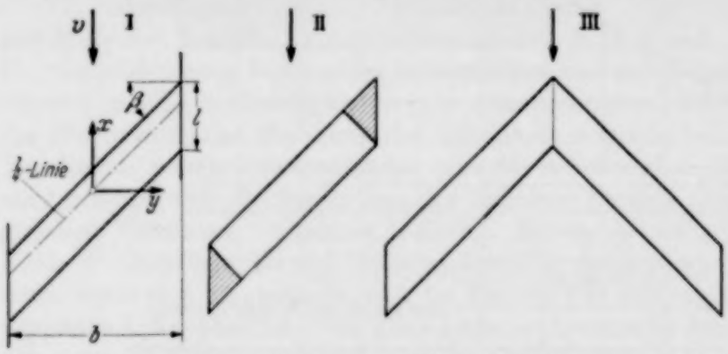


Abb. 1. Erläuterungsskizze: *Anordnung I:* Schiebender Flügel zwischen Endscheiben; *Anordnung II:* Schiebender gerader Flügel; *Anordnung III:* Pfeilflügel.

Bei den theoretischen Überlegungen zum Pfeilflügelproblem spielt das $\cos\beta$-Gesetz für den Auftrieb eine wichtige Rolle. Man versteht darunter, daß beim Übergang vom nicht schiebenden Flügel auf einen Flügel mit dem Schiebewinkel β der Auftrieb mit $\cos\beta$ kleiner wird, wenn dabei das Flügelprofil und der Anstellwinkel in der Anströmungsrichtung konstant bleiben. Dieses $\cos\beta$-Gesetz soll durch unsere Messungen experimentell geprüft werden. Es wird sich ergeben, daß es bis zu großen Schiebewinkeln sehr gut erfüllt ist.

Diese Messungen bilden einen weiteren Beitrag zu den systematischen Pfeilflügelmessungen des Aerodynamischen Institutes der T. H. Braunschweig [1] [2].

2. Bezeichnungen. Im folgenden sind die Bezeichnungen nach dem Normblatt DIN L 100 benutzt worden, nämlich

x, y, z	Achsen des Koordinatensystems (der Koordinatenursprung liegt im $l/4$-Punkt der Profilsehne im Mittelschnitt des Flügels, Abb. 1),
l	Flügeltiefe in Anströmungsrichtung,
b	Flügelspannweite senkrecht zur Anströmungsrichtung,
F	Flügelfläche,
$\Lambda = b^2/F$	Seitenverhältnis,
α	Anstellwinkel des Flügels,

* Die hier mitgeteilten sehr einfachen Messungen, die im Jahre 1944 im früheren Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule Braunschweig (Leitung: Prof. Dr. *H. Schlichting*) ausgeführt wurden, haben eine wichtige grundsätzliche Bedeutung für den Pfeilflügel. Trotz der in der Zwischenzeit stark ausgedehnten Forschung über Pfeilflügel sind systematische Messungen der hier vorliegenden Art noch nicht bekannt geworden, so daß eine Veröffentlichung unserer Ergebnisse auch heute noch angebracht erscheint. Dies ergab sich insbesondere aus einer Diskussion auf der Tagung des VDI-Fachausschusses für Strömungsforschung in Berlin am 7. 2. 1952. Die Bearbeitung des Manuskriptes für die Veröffentlichung sowie die theoretischen Überlegungen des Abschnittes 5 stammen von *E. Truckenbrodt.*

[1] *W. Jacobs*, Ing.-Arch. 18 (1950), S. 344; 19 (1951), S. 83 und S. 400.

[2] *H. Trienes* und *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 26.

α' unkorrigierter geometrischer Anstellwinkel,
β Schiebewinkel des Flügels,
$q_0 = \frac{\varrho}{2} v^2$ Staudruck der Anströmung,
$p - p_0$ gemessener Druck am Profil,
$c_a = \frac{A}{q_0 F}$ Auftriebsbeiwert des ganzen Flügels,
$c_w = \frac{W}{q_0 F}$ Widerstandsbeiwert des ganzen Flügels,
$c_M = \frac{M}{q_0 F l}$ Momentenbeiwert des ganzen Flügels, schwanzlastig positiv (Momentenbezugsachse die y-Achse),
$c_{a\,\text{örtl}}$ örtlicher Auftriebsbeiwert,
$c_{w\,\text{örtl}}$ örtlicher Widerstandsbeiwert.

3. Modellbeschreibung. Für die durchgeführten Untersuchungen sind drei Flügel konstanter Tiefe mit den Schiebewinkeln $\beta = 0°$, $30°$ und $45°$ verwendet worden (Abb.2). Die Spannweite der Flügel beträgt $b = 0{,}60$ m, die Tiefe $l = 0{,}20$ m. Daraus ergibt sich ein Seitenverhältnis von $\Lambda = 3$. Als Profil wurde NACA 0015 gewählt. Längs der Spannweite waren 9 Druckmeßschnitte mit je 18 Druckmeßstellen vorhanden, deren Lagen aus Abb.2 zu ersehen sind. Die Flügel waren mit Endscheiben von rechteckigem Umriß ($0{,}35 \times 0{,}60$ m) versehen und aus Preßschichtholz hergestellt.

4. Umfang und Ergebnisse der Messungen. Die Messungen wurden noch vor Kriegsende in dem früheren Aerodynamischen Institut der Technischen Hochschule zu Braunschweig durchgeführt. Der Strahldurchmesser des Kanales war 1,2 m. Die Geschwindigkeit betrug $v = 40$ m/sec, was einer *Reynolds*schen Zahl $Re = vl/\nu = 5{,}6 \cdot 10^5$ entspricht. Es wurden folgende Messungen ausgeführt:

a) Dreikomponentenmessungen (c_a, c_w, c_M) für alle drei Flügel mit Endscheiben und für die Flügel $\beta = 0°$ und $\beta = 45°$ ohne Endscheiben. Die Polaren, Auftriebs- und Momentenkurven sind in Abb.3 und 4 dargestellt.

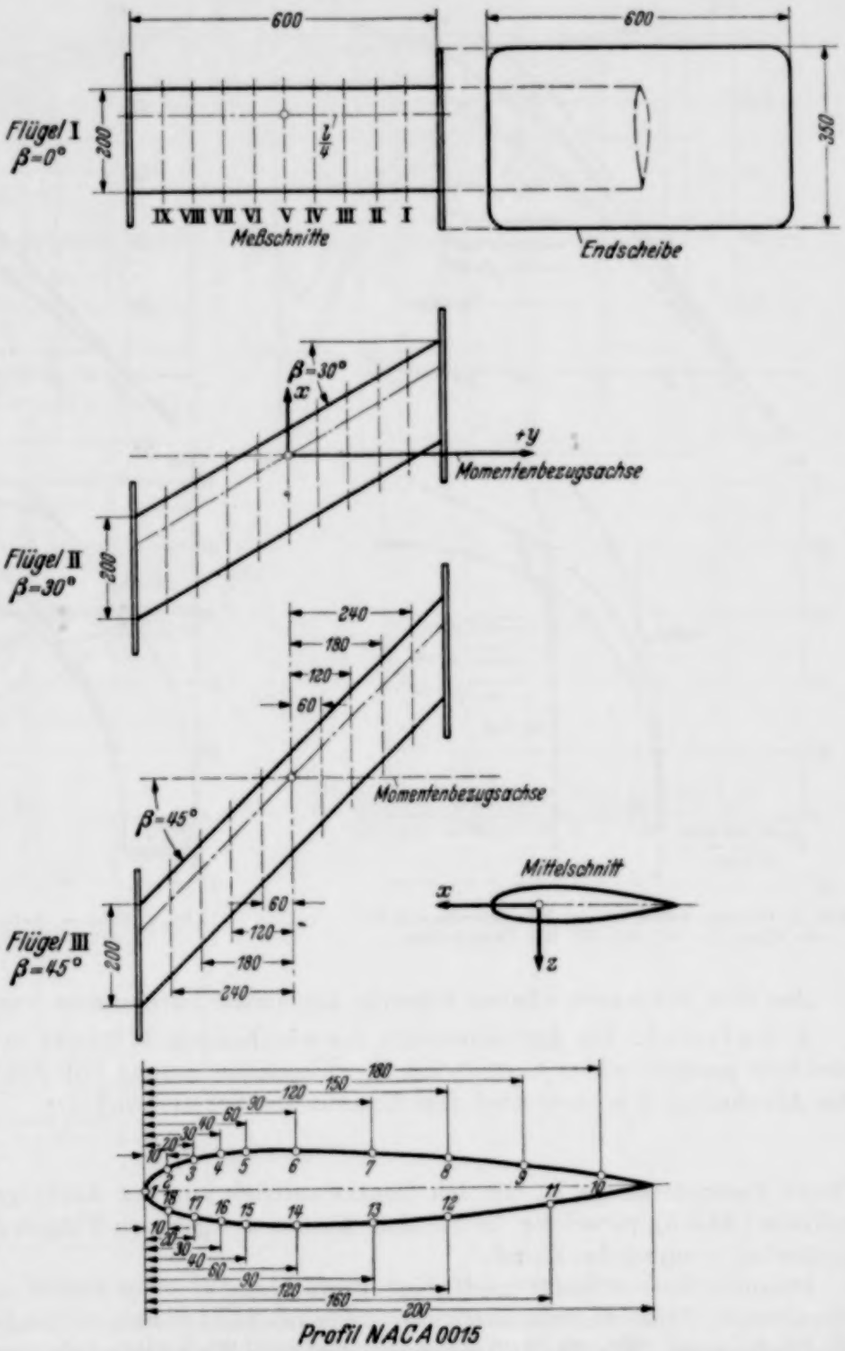


Abb. 2. Übersichtsskizze der verwendeten Flügel und Lage der Meßschnitte und Meßanbohrungen. Maße in mm.

b) Druckverteilungsmessungen längs Spannweite bei 6 Anstellwinkeln ($\alpha' = 0, 3, 6, 9, 12, 15°$). Auf die Wiedergabe sämtlicher Druckverteilungen an den einzelnen Flügelschnitten wird verzichtet. In Abb.5 sind die Verteilungen im Mittelschnitt (Nr. V) für die Flügel mit Endscheiben bei drei verschiedenen Anstellwinkeln zusammengestellt. Die aus den Druckverteilungen ermittelten $c_{a\,örtl}$-Verteilungen sind in Abb. 7 und 8 für die Flügel mit und ohne Endscheiben dargestellt.

c) Impulsmessungen an verschiedenen Stellen längs Spannweite für verschiedene Anstellwinkel zur Bestimmung der örtlichen Profilwiderstandsbeiwerte (Abb. 9).

d) Messungen der Grenzschichtdicke an der Hinterkante des Flügels $\beta = 45°$ (mit Endscheiben) bei verschiedenen y-Werten (Abb.10).

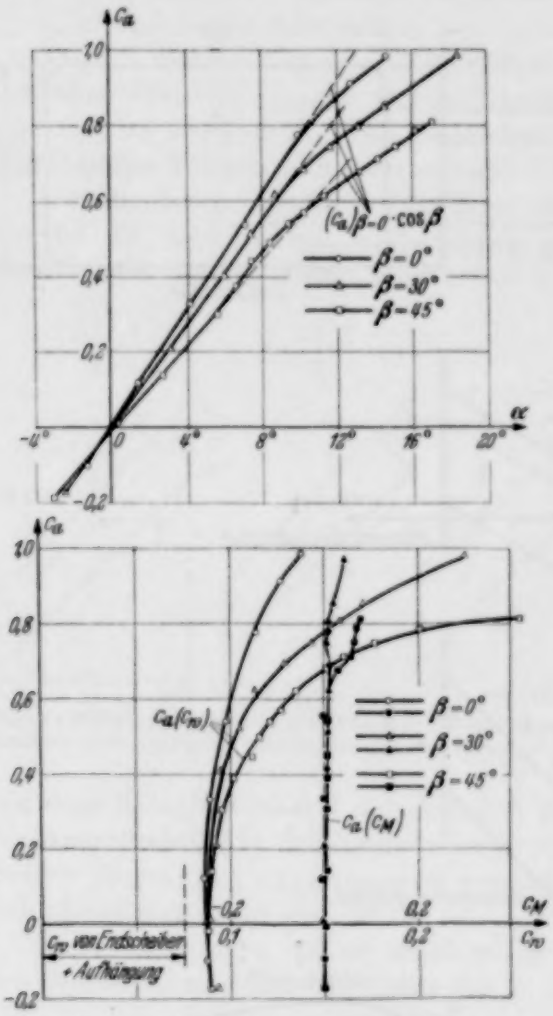


Abb. 3. Polaren, Auftriebs- und Momentenkurven für die Flügel $\beta = 0°$, 30°, 45° mit Endscheiben.

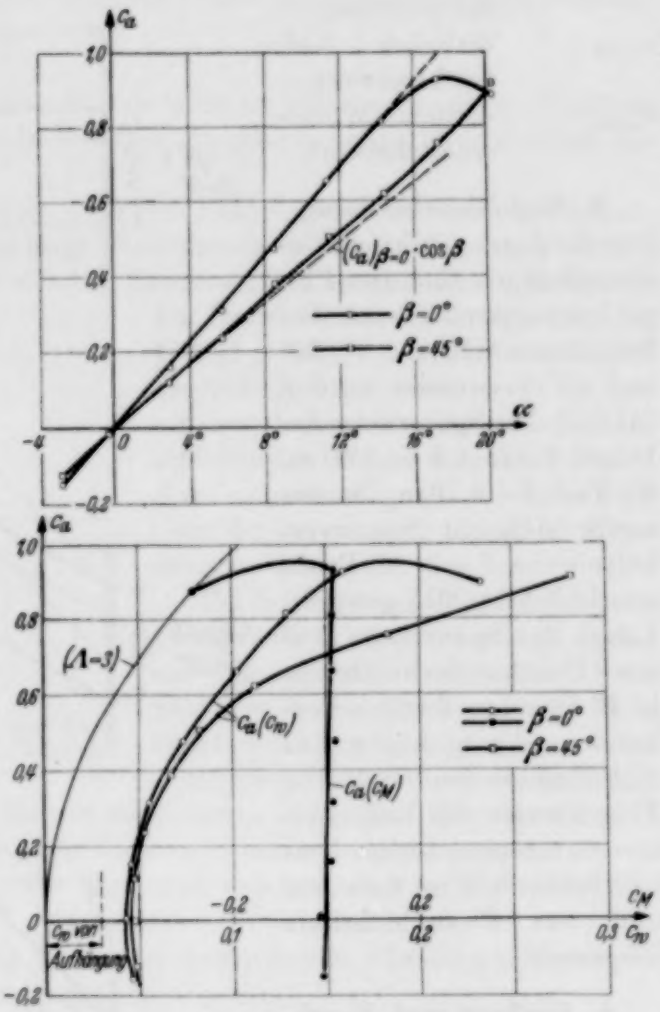


Abb. 4: Polaren, Auftriebs- und Momentenkurven für die Flügel $\beta = 0°$, 45° ohne Endscheiben.

Aus den Messungen können folgende Ergebnisse entnommen werden:

1. Auftrieb. Die Auftriebskräfte des schiebenden Flügels mit Endscheiben sind bei gleichem geometrischen Anstellwinkel in Übereinstimmung mit den theoretischen Überlegungen des Abschnittes 5 proportional dem Cosinus des Schiebewinkels:

$$c_a = (c_a)_{\beta=0} \cdot \cos\beta \,.$$

Dieser Zusammenhang ist für den Gesamtauftrieb aus den Auftragungen von c_a über α zu entnehmen (Abb. 3), in welche die aus den Werten des geraden Flügels $\beta = 0$ umgerechneten Werte gestrichelt eingezeichnet sind.

Dasselbe Gesetz findet auch seine Bestätigung für den örtlichen Auftrieb des Flügels längs Spannweite. Diese Werte wurden gewonnen aus den Druckverteilungsmessungen an den einzelnen Profilschnitten. Wie die Auftragungen der $c_{a\,örtl}$-Werte längs Spannweite zeigen (Abb.7), ist für die Flügel mit Endscheiben bei kleinen Anstellwinkeln die Auftriebsverteilung längs Spannweite mit recht guter Genauigkeit konstant. Bei größeren Anstellwinkeln treten jedoch infolge von Grenzschichteinflüssen Abreißerscheinungen an dem rückliegenden Ende des Flügels auf. Die gestrichelten Kurven in Abb.7 sind aus den entsprechenden gestrichelten Mittelwerten des ge-

raden Flügels durch Multiplikation mit dem Faktor $\cos\beta$ erhalten worden. Man sieht, daß die Proportionalität mit $\cos\beta$ im gesunden Anstellwinkelbereich sehr gut erfüllt ist.

Weiter wurde untersucht, ob die Druckverteilung am Profil, also der Druck in jedem einzelnen Punkt, ebenfalls dem obigen $\cos\beta$-Gesetz unterliegt. Da die Druckverteilungen bei anliegender

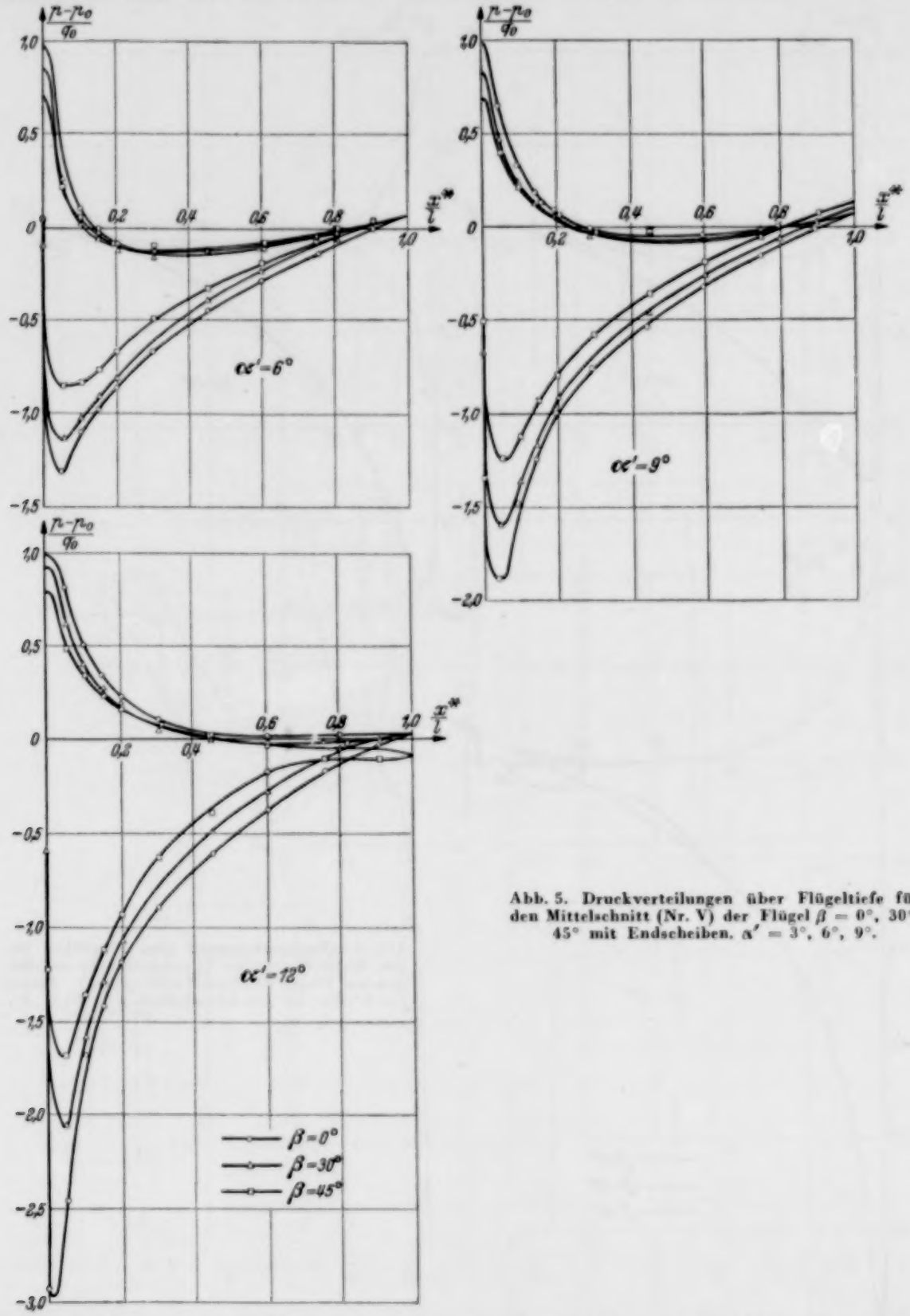


Abb. 5. Druckverteilungen über Flügeltiefe für den Mittelschnitt (Nr. V) der Flügel $\beta = 0°$, 30°, 45° mit Endscheiben. $\alpha' = 3°$, 6°, 9°.

Strömung an den einzelnen Schnitten gut übereinstimmen, haben wir diese Kontrolle nur für den Mittelschnitt durchgeführt, für den in Abb. 5 die Druckverteilungen aufgetragen sind. Bei Gültigkeit der Proportionalität des örtlichen Druckes mit $\cos\beta$, müssen die Verteilungen für alle Flügel zusammenfallen, wenn wir $(p - p_0)/\cos\beta$ über der Tiefe auftragen. Wie Abb. 6 zeigt, liegen diese umgerechneten Werte tatsächlich für alle drei Flügel auf einer einzigen Kurve. Hiermit ist also bewiesen, daß die gesamte Druckverteilung am Flügel sich mit dem Schiebewinkel nach dem $\cos\beta$-Gesetz ändert.

Der Gesamtauftrieb des schiebenden Flügels ohne Endscheiben ($\beta = 45°$) folgt ebenfalls näherungsweise dem $\cos\beta$-Gesetz (vgl. Abb. 4). Bezüglich der Auftriebsverteilung längs Spannweite (Abb. 8) müßte eine genaue Auftriebsverteilungsrechnung durchgeführt werden, um einen Vergleich zwischen dem nicht schiebenden und dem schiebenden Flügel durchführen zu können (vgl. Abschn. 5).

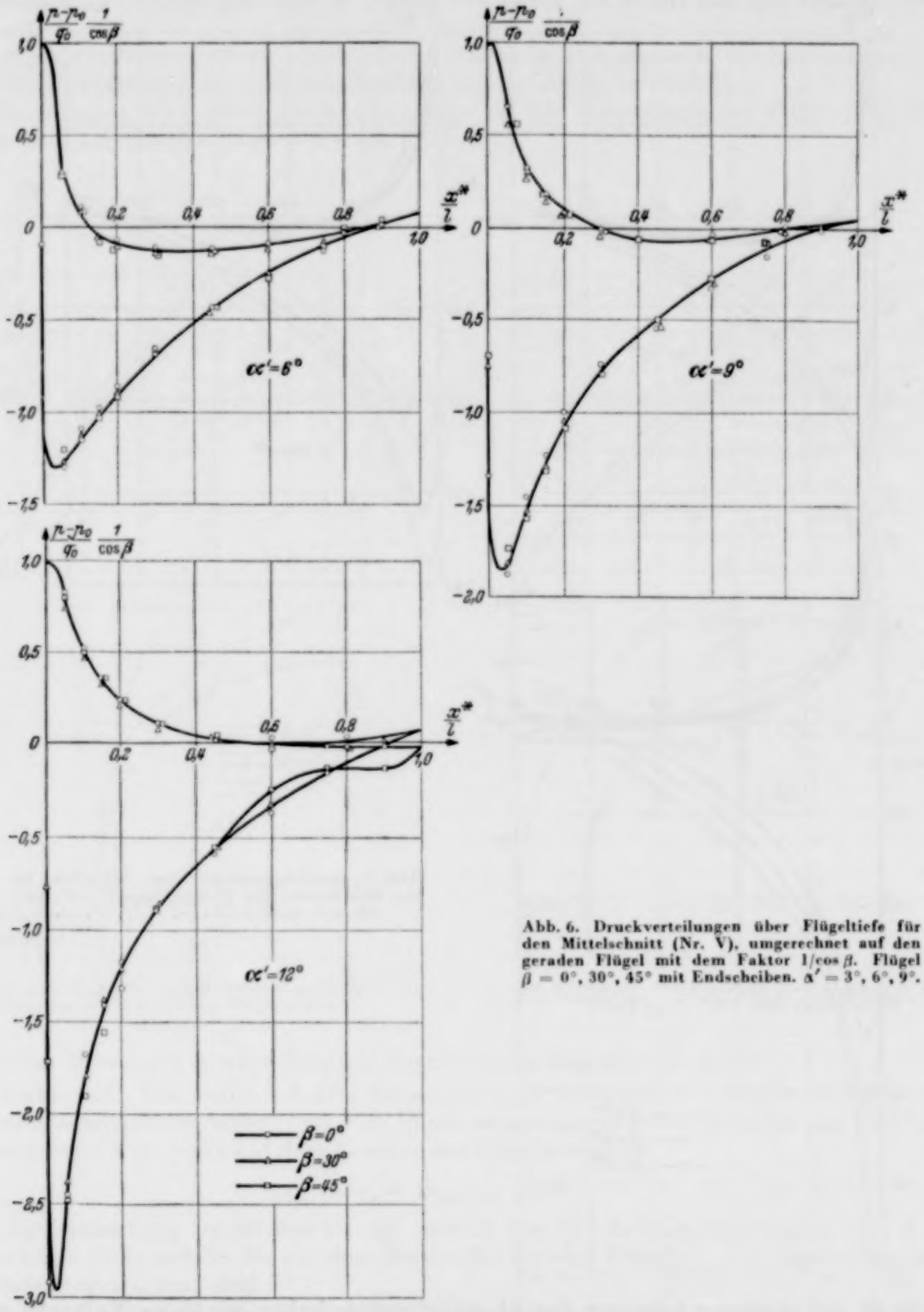


Abb. 6. Druckverteilungen über Flügeltiefe für den Mittelschnitt (Nr. V), umgerechnet auf den geraden Flügel mit dem Faktor $1/\cos\beta$. Flügel $\beta = 0°, 30°, 45°$ mit Endscheiben. $\alpha' = 3°, 6°, 9°$.

2. Neutralpunktlage. Der Neutralpunkt bleibt bei den Flügeln mit Endscheiben für sämtliche Schiebewinkel annähernd im $l/4$-Punkt des Mittelschnittes erhalten, wie aus Abb. 3 hervorgeht. Es ergibt sich für alle Flügel $dc_M/dc_a = 0{,}01$, bezogen auf den $l/4$-Punkt des Mittelschnittes; der Neutralpunkt liegt also auf 24% der Flügeltiefe hinter der Flügelnase. Die Ergebnisse der Flügel ohne Endscheiben sind für den schiebenden Flügel leider verloren gegangen.

3. Profilwiderstand längs Spannweite. Einen besonderen Einfluß hat der Schiebewinkel auf die Grenzschicht und damit auf die Verteilung des Profilwiderstandes längs Spannweite des Flügels. Die Grenzschichtbeeinflussung rührt daher, daß beim schiebenden Flügel infolge der in Strömungsrichtung vorhandenen Verschiebung der Profile ein Druckgradient in der Querrichtung entsteht, dem vor allem das abgebremste Grenzschichtmaterial infolge seiner ge-

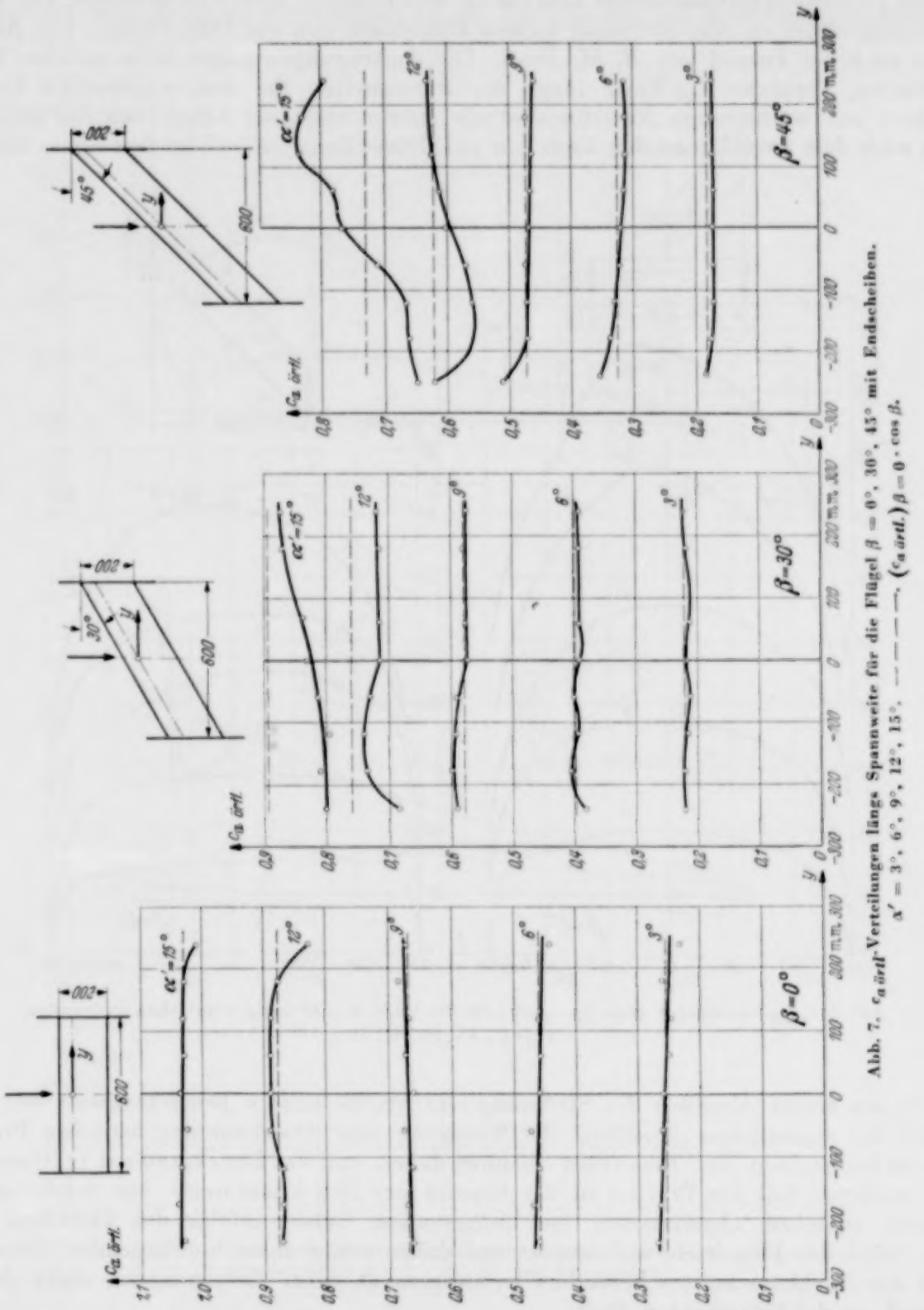


Abb. 7. $c_{a\,örtl.}$-Verteilungen längs Spannweite für die Flügel $\beta = 0°$, 30°, 45° mit Endscheiben. $\alpha' = 3°$, 6°, 9°, 12°, 15°. — — — —, $(c_{a\,örtl.})\,\beta = 0 \cdot \cos\beta$.

ringen Geschwindigkeit und der daraus resultierenden geringen Trägheitskräfte zu folgen vermag. Beim schiebenden Flügel tritt auf der Saugseite des Flügel nach dem zurückliegenden Flügelende eine Druckabnahme auf, so daß das Abwandern des Grenzschichtmaterials in dieser Richtung erfolgt und daher eine Anhäufung im rückliegenden äußeren Flügelteil erzeugt wird. Dieses bedeutet erhöhten Profilwiderstand und erhöhte Abreißgefahr in diesem Gebiet bei höheren Anstellwinkeln. Der Einfluß ist umso stärker, je größer der Schiebewinkel des Flügels ist. Diese Erscheinung geht deutlich aus unseren Messungen hervor (vgl. Abb. 3 und 4). Der Flügel mit größtem

Schiebewinkel hat im oberen c_a-Bereich die größten Widerstände, und seine Polare knickt dort zuerst ab. Der eingetragene Widerstand stellt die Summe von Flügelwiderstand und Widerstand der Endscheiben und der Aufhängung dar.

Aufschluß über die Profilwiderstände längs Spannweite geben die bei mehreren Anstellwinkeln in verschiedenen Schnitten hinter den Flügeln durchgeführten Impulsmessungen. Die hieraus ermittelten Profilwiderstandsbeiwerte sind für die drei Flügel in Abb. 9 aufgetragen. Die Messungen wurden ausgeführt im Abstand einer halben Flügeltiefe von der Hinterkante. Die Auswertung erfolgte nach der Formel von *B. M. Jones*. Die Auftragungen zeigen beim geraden Flügel wie zu erwarten, konstante c_{wp}-Werte längs der Spannweite. Bei den schiebenden Flügeln dagegen tritt mit wachsendem Anstellwinkel ein immer stärkeres Anwachsen des örtlichen c_{wp}-Wertes nach dem zurückliegenden Ende hin auf. Diese Zunahme erfolgt fast linear bis kurz vor

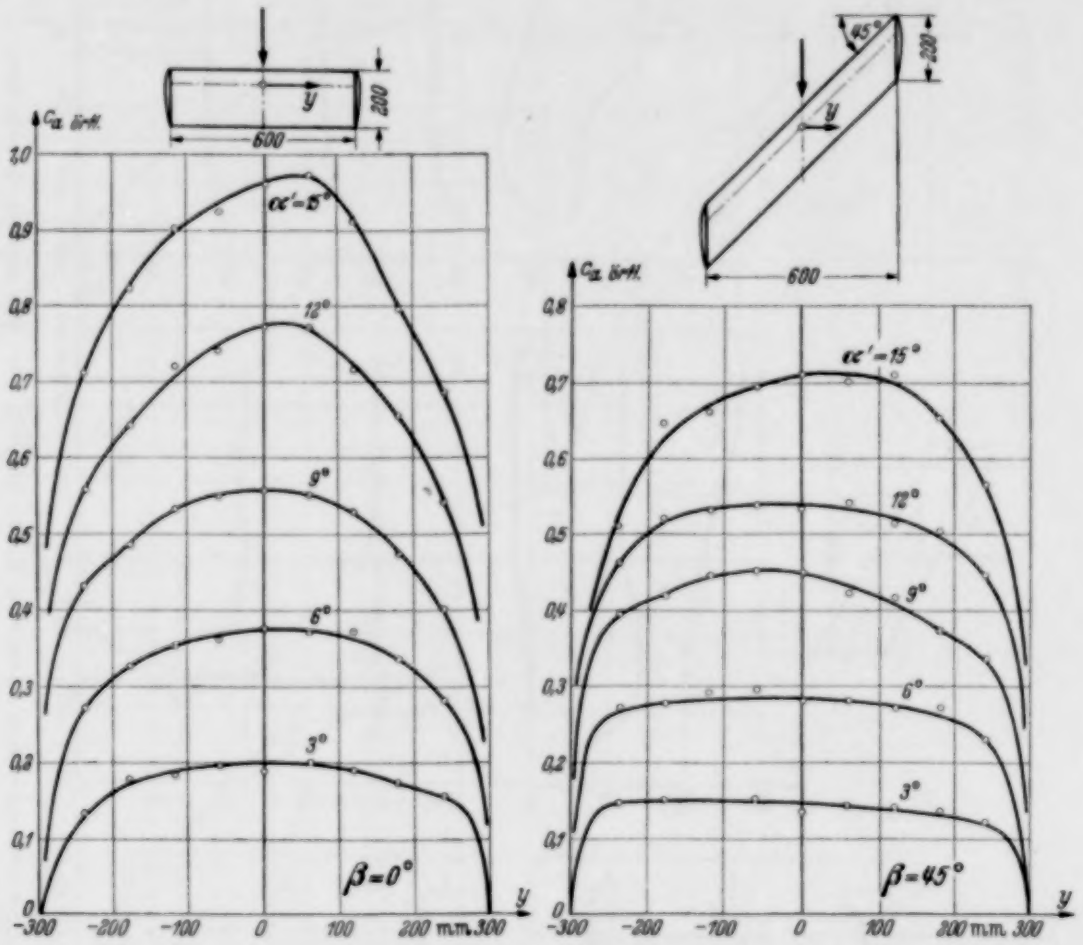


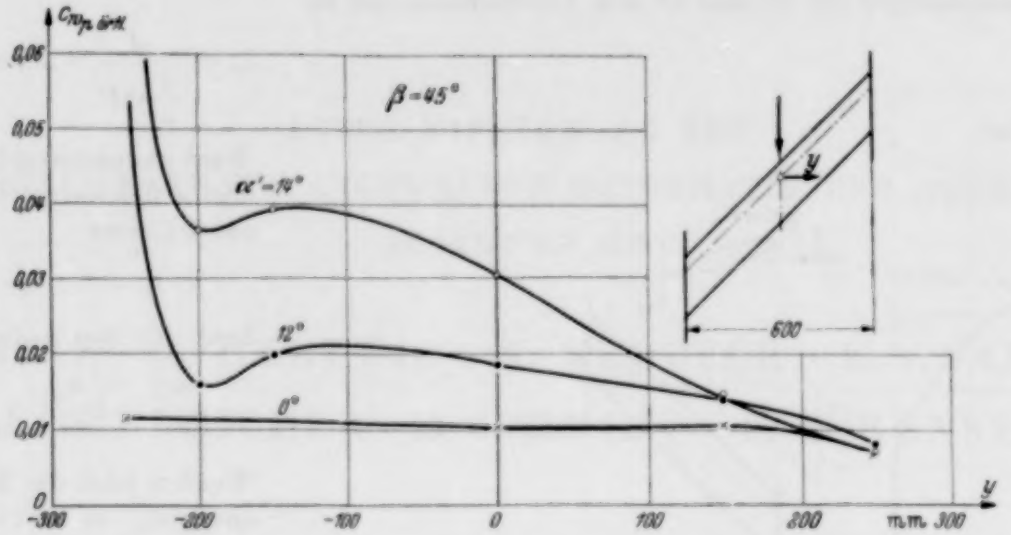
Abb. 8. $c_{a\,örtl}$-Verteilungen längs Spannweite für die Flügel $\beta = 0°$ und $\beta = 45°$ ohne Endscheiben. $\alpha' = 3°, 6°, 9°, 12°, 15°$.

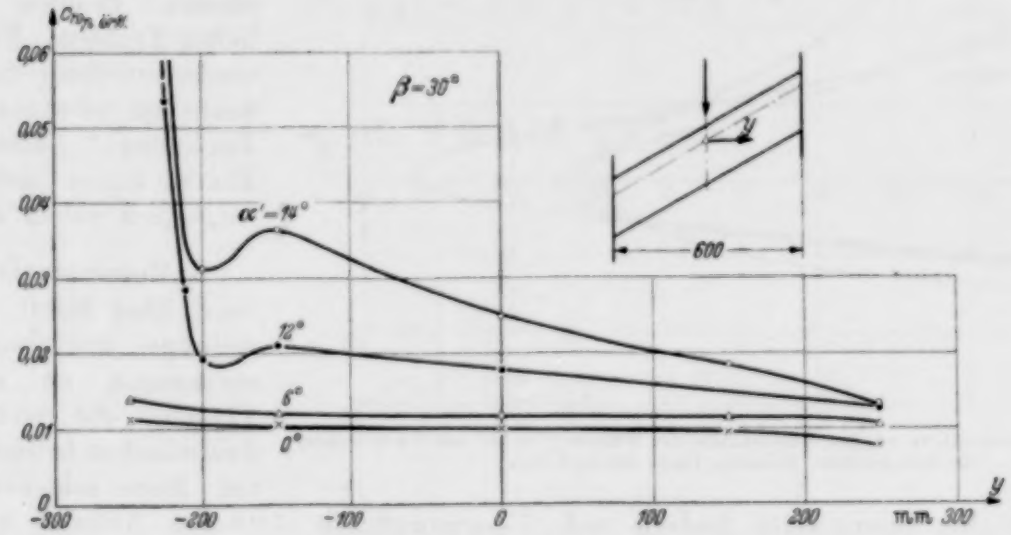
die Stelle, wo zuerst Abreißen der Strömung eintritt. Besonders bemerkenswert ist, daß vor der Stelle des eigentlichen Abreißens der Strömung eine Abnahme des örtlichen Profilwiderstandes zu beobachten ist. Dies rührt offenbar daher, daß der Druckgradient in Querrichtung, der im vorderen Teil des Profiles in der Gegend des Druckminimums am stärksten ist, an der Grenze zwischen abgerissenem und anliegendem Gebiet infolge des Abreißens über ein längeres Stück der Flügeltiefe wirksam ist und daher von dem noch anliegenden Grenzschichtmaterial des Nachbarschnittes besonders viel abgesaugt wird. Infolgedessen sinkt der Profilwiderstand an der betreffenden Stelle.

Die Zunahme der Grenzschichtdicke am Flügel $\beta = 45°$ ist in Abb.10 für den Anstellwinkel $\alpha' = 14°$ dargestellt. Es ist hier das Ergebnis einer Gesamtdruckmessung dicht hinter der Hinterkante des Flügels aufgetragen. Die Messungen wurden an drei verschiedenen Schnitten am zurückliegenden Teil des Flügels durchgeführt. Die Koordinate z ist positiv nach unten gemessen. Die Zunahme der Grenzschichtdicke erfolgt ausschließlich auf der Saugseite, während die Druckseite nur geringe Änderungen aufweist. Hieraus geht hervor, daß der Einfluß der „Grenzschichtabwanderung" sich nur auf der Saugseite abspielt.

5. Theoretische Überlegungen. Bei der Diskussion der Ergebnisse der Auftriebsmessungen für die Flügel mit Endscheiben im vorigen Abschnitt wurde gefunden, daß sich die Auftriebskräfte bei gleichem in Anströmungsrichtung gemessenen Anstellwinkel um den Faktor $\cos\beta$ gegenüber den Werten des nicht schiebenden Flügels ($\beta = 0$) verkleinern. Dieses $\cos\beta$-Gesetz läßt sich folgendermaßen leicht theoretisch begründen:

Wir nehmen eine zwischen Endscheiben befindliche ebene Platte an, die zur Anströmungsrichtung um den Schiebewinkel β schräggestellt ist, und die mit der Anströmungsrichtung den





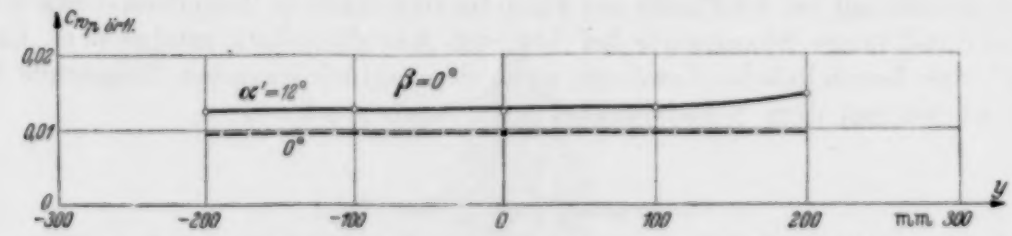


Abb. 9. Örtlicher Profilwiderstand längs Spannweite bei verschiedenen Anstellwinkeln für die Flügel $\beta = 0°$, 30°, 45° mit Endscheiben.

Anstellwinkel α bildet. Da durch die Endscheiben eine seitliche Umströmung der Flügelenden verhindert wird, kann geschlossen werden, daß der Druck auf Linien gleicher prozentualer Rücklage längs Spannweite konstant ist. Es liegt also ein sogenanntes „quasiebenes" Problem vor. Denken wir uns jetzt den Flügel durch einen Potentialwirbel ersetzt, so kann dieser gemäß dem eben Gesagten nur in Richtung des schiebenden Flügels liegen. Wird nun dieser Wirbel mit der Anströmungsgeschwindigkeit v angeblasen, so ist nach *Kutta-Joukowsky* jedoch nur die senkrecht zur Wirbellinie herrschende Geschwindigkeitskomponente, in unserem Fall $v^* = v\cos\beta$,

für die Auftriebserzeugung wirksam. Desgleichen ist auch der Anstellwinkel α^* senkrecht zur Wirbellinie zu messen. Für kleine Anstellwinkel gilt $\alpha^* = \alpha/\cos\beta$.

Die gesamte Auftriebskraft der unter dem Anstellwinkel α^* stehenden ebenen Platte, die mit der Geschwindigkeit v^* angeströmt wird, ergibt sich zu

$$A = 2\pi\alpha^* \frac{\varrho}{2} v^{*2} F^* .$$

Beachten wir, daß $F^* = F$ die Fläche des schiebenden Flügels ist, dann erhalten wir unter Einsetzen der Beziehungen für v^* und α^* den Auftriebsbeiwert zu

$$c_a = \frac{A}{\frac{\varrho}{2} v^2 F} = 2\pi\alpha\cos\beta .$$

Wird α konstant gehalten, dann ergibt sich daraus das gesuchte $\cos\beta$-Gesetz

$$c_a = c_{a\,\beta=0}\cos\beta ,$$

bzw. für den Auftriebsanstieg

$$\frac{dc_a}{d\alpha} = \left(\frac{dc_a}{d\alpha}\right)_{\beta=0}\cos\beta .$$

Werden jetzt die Endscheiben entfernt, so wird aus dem eben behandelten „quasiebenen" Problem ein räumliches Problem. Für die Auftriebsverteilung längs Spannweite ist jetzt eine genauere Rechnung durchzuführen. Hierzu eignet sich z. B. das Verfahren von *J. Weissinger*[1].

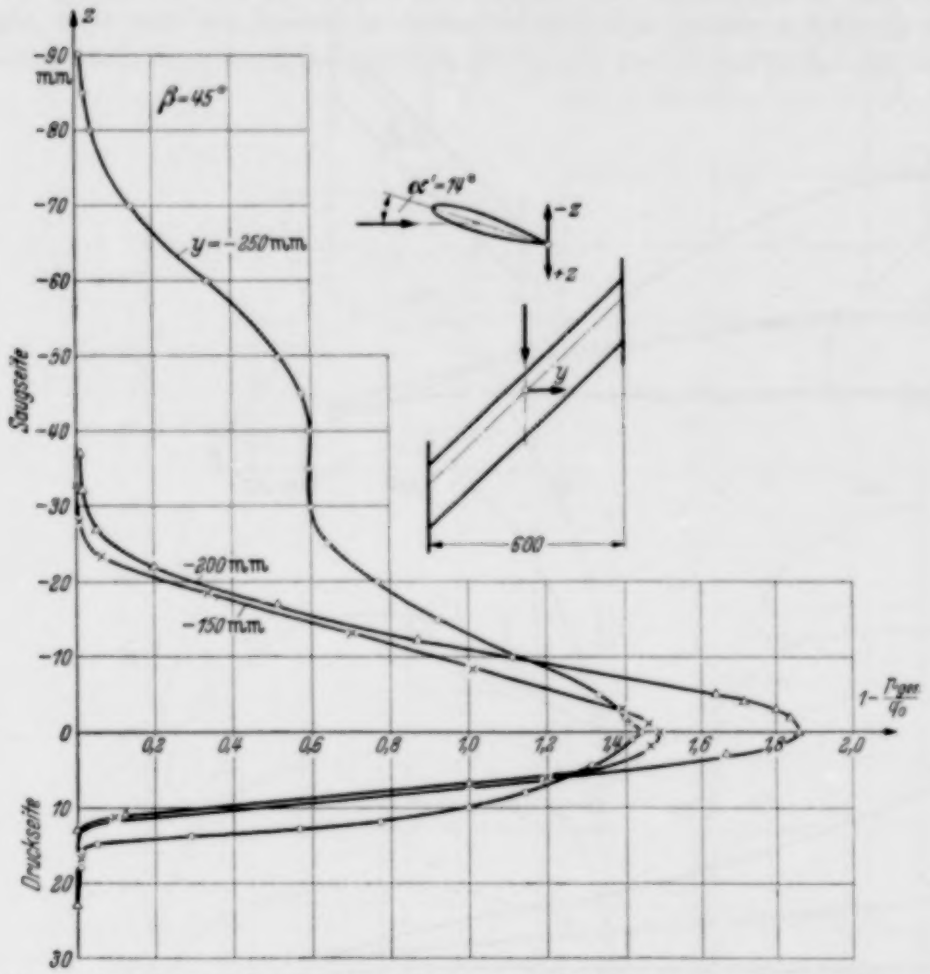


Abb. 10. Grenzschichtdicke an der Hinterkante des Flügels $\beta = 45°$ mit Endscheiben für verschiedene Schnitte längs Spannweite.

6. Zusammenfassung. Es wird über Kraft-, Druckverteilungs- und Impulsverlustmessungen an schiebenden Flügeln, die sich zwischen Endscheiben befinden, berichtet. Beim schiebenden Tragflügel unendlicher Spannweite ändern sich Gesamtauftrieb, örtlicher Auftrieb und Druckverteilung nach dem $\cos\beta$-Gesetz (β = Schiebewinkel). Der Neutralpunkt liegt für sämtliche Schiebewinkel annähernd im $l/4$-Punkt des Flügelmittelschnittes. Impulsmessungen zeigen, daß der Profilwiderstand längs Spannweite bei höheren Anstellwinkeln infolge der „Grenzschichtabwanderung" eine beträchtliche Zunahme nach dem zurückliegenden Flügelende hin erfährt. Dieser Effekt wächst mit dem Schiebewinkel des Flügels stark an.

(Eingegangen am 2. Mai 1952.)

Anschrift des Verfassers: Dr. habil. *W. Jacobs*, Stockholm-Bromma (Schweden), Stora Mossens Backe 6.

Dr.-Ing. *E. Truckenbrodt*, Braunschweig, Technische Hochschule, Institut für Strömungsmechanik.

[1] *J. Weissinger*, Jahrbuch 1940 der deutschen Luftfahrtforschung, S. I 145 und 1943 (Vorabdruck Techn. Berichte 10 (1943) H. 7).